Teoría estadística para economistas

Francisco Garro
Óscar Hernández

EDITORIAL UCR

310
G243t Garro Molina, Francisco.
Teoría estadística para economistas / Francisco Garro, Oscar Hernández. –1. edición– [San José, Costa Rica] : Editorial UCR, 2019.
1 recurso en línea (ix, 301 páginas) : ilustraciones en blanco y negro, digital, archivo PDF; 1.9 MB

ISBN 978-9968-46-799-5

1. ESTADÍSTICA. I. Hernández Rodríguez, Oscar Eduardo, autor. II. Título.

CIP/3425
CC.SIBDI.UCR

Edición aprobada por la Comisión Editorial de la Universidad de Costa Rica

Segunda edición impresa: 2009
Primera edición digital (PDF): 2019

Editorial UCR es miembro del Sistema de Editoriales Universitarias de Centroamérica (SEDUCA), perteneciente al Consejo Superior Universitario Centroamericano (CSUCA).

Revisión filológica: *Los autores* • Levantado de texto, diagramación electrónica y artes finales: *Francisco Garro* • Corrección de pruebas: *Los autores* • Diseño de portada: *Ana Lorena Barrantes* • Elaboración del PDF: *Alonso Prendas* • Control de calidad de la versión digital: *Elisa Giacomin.*

Edición digital de la Editorial Universidad de Costa Rica. Fecha de creación: agosto, 2019
Universidad de Costa Rica. Ciudad Universitaria Rodrigo Facio.

Apdo. 11501-2060 • Tel.: 2511 5310 • Fax: 2511 5257 • administracion@editorial.ucr.ac.cr • www.editorial.ucr.ac.cr

Teoría estadística para economistas

Francisco Garro
Óscar Hernández

Segunda edición

EDITORIAL UCR

CONTENIDO

1. PROBABILIDADES

1.1. INTRODUCCIÓN

La teoría de la probabilidad matemática tiene sus orígenes en la teoría de la casualidad, a pesar de que el concepto de incertidumbre es tan antiguo como nuestra civilización.

Se sabe que el juego con dados tuvo un papel muy importante en los inicios del desarrollo de la teoría de la probabilidad.

Alrededor del año 3500 antes de Cristo los egipcios habían desarrollado objetos de hueso, los cuales son considerados como los precursores de los dados y por el año 2000 A.C., ya estos objetos eran virtualmente idénticos a los dados modernos.

En 1654, los matemáticos franceses, Blaise Pascal y Pierre Fermat, derivaron las probabilidades exactas para ciertos problemas de juegos relacionados con dados, iniciando la Teoría Matemática de la Probabilidad.

Una teoría más sistemática de los juegos de azar fue desarrollada por Jacob Bernoulli (*Ars conjectandi*; 1713), Abraham de Moivre (The Doctrine of Chances; 1718) y Pierre Simón de Laplace (*Théorie analytique des probabilités*; 1812). Más adelante Gauss y Laplace hicieron importantes contribuciones en este campo, sobre todo en aplicaciones al análisis numérico de los errores de medición y al método de mínimos cuadrados.

El gran desarrollo de los seguros de vida en los comienzos del siglo XIX fue posible gracias a la evolución de la matemática actuarial, que a su vez estuvo basada en la aplicación de la probabilidad a las estadísticas de mortalidad. Aplicaciones adicionales a la demografía y a otras ramas de la ciencia fueron hechas por Quetelet y su escuela.

La teoría de la probabilidad ha sido de fundamental importancia en la física moderna, después de haber sido introducida por los trabajos de Maxwell, Boltzman y Gibbs, en lo que se ha llamado Estadística Mecánica.

Actualmente la estadística, que se apoya en la teoría de las probabilidades, es una herramienta indispensable en la investigación científica y tecnológica. En la Economía, su aplicación ha dado origen a la Econometría, que es el desarrollo de nuevos métodos estadísticos para la determinación de las relaciones entre variables económicas, sugeridas por la teoría económica.

En este capítulo se tratarán los conceptos básicos de la teoría de probabilidades, que fundamentan la teoría estadística básica sobre la cual se desarrolla la econometría, empezando con las diferentes interpretaciones de probabilidad en la sección 1.2.

En la tercera sección se introduce el concepto de modelo probabilístico y en la sección 1.4 se hace un breve repaso de algunos conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos.

La sección 1.5 desarrolla el tema de los métodos de conteo, tales como permutaciones y combinaciones, importantes para aquellos casos con un espacio muestral grande.

Las condiciones "necesaria", "suficiente" y "necesaria y suficiente" se definen en la sección 1.6, mientras que la definición axiomática de probabilidad se presenta con detalle en la sección 1.7.

En la sección 1.8 se define la probabilidad conjunta y marginal y finalmente en las secciones 1.9 y 1.10, la probabilidad condicional e independencia de eventos, respectivamente.

1.2. PROBABILIDAD

No obstante que la probabilidad es un concepto usado con mucha frecuencia en la ciencia, así como en la vida diaria, no existe una definición científica única que sea aceptada por todos los estadísticos.

A continuación se describen las diferentes interpretaciones de probabilidad, las cuales serán muy útiles en la aplicación de la teoría de probabilidades a problemas prácticos.

1.2.1 Interpretación clásica de probabilidad

Según esta interpretación, la probabilidad de que ocurra un determinado suceso está dada por el cociente $\frac{h}{m}$, donde m es el total de resultados posibles "mutuamente excluyentes" e "igualmente probables" y h es el total de ellos que se consideran favorables al suceso.

Esta interpretación está basada en el concepto de resultados igualmente probables, es decir, aquellos que, a priori, esperamos que ocurran con igual frecuencia en un gran número de repeticiones del experimento aleatorio. Se supone también que los resultados son mutuamente excluyentes, es decir, la ocurrencia de uno imposibilita la ocurrencia de cualquier otro resultado.

Ejemplo 1

Cuando se lanza una moneda existen dos posibles resultados, escudo o corona. Se supone que ambos resultados son igualmente probables y como la ocurrencia de escudo (corona) impide la ocurrencia de obtener corona (escudo) al realizar el experimento, es decir, los resultados son mutuamente excluyentes, la probabilidad de obtener escudo es igual a $\frac{h}{m}=\frac{1}{2}$, que también es igual a la probabilidad de obtener corona.

Ejemplo 2

Se lanza un dado ¿Cuál es la probabilidad de obtener 5 o más puntos?

Es evidente que esta probabilidad es igual a: $\frac{h}{m}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. //

En general, si el resultado de un experimento aleatorio es cualquiera de m diferentes resultados, todos igualmente probables y mutuamente excluyentes, entonces la probabilidad de cada resultado es 1/m.

Dos dificultades básicas surgen cuando se trata de aplicar la definición clásica de probabilidad. La primera es la dependencia de la definición del supuesto de que todos los resultados son igualmente probables, es decir, es una definición circular. Si nos preguntaran por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de obtener una corona cuando lanzamos una moneda sesgada?, no estaríamos en capacidad de responder a dicha pregunta. La segunda dificultad es la imposibilidad de asignar probabilidades a priori a situaciones fuera del dominio de los juegos de azar. Por ejemplo, la probabilidad de que un proyecto tenga éxito, la eficacia de una vacuna, etc.

Las dificultades anteriores asociadas con la definición clásica de probabilidad se pueden evitar si se adopta el siguiente concepto frecuencial de probabilidad.

1.2.2 Interpretación frecuencial de probabilidad

En muchos problemas la probabilidad de obtener un resultado específico se interpreta como la frecuencia relativa $\frac{f}{n}$, con la cual dicho resultado se manifiesta en n repeticiones del experimento y en f de las cuales ocurre el resultado de interés. En general las repeticiones deber realizarse bajo condiciones similares y el número de ellas debe ser muy grande. Más precisamente, la probabilidad se define como el límite de las frecuencias relativas cuando el número de repeticiones tiende a infinito.

Ejemplo 3

La probabilidad de obtener el número dos al lanzar un dado es 1/6, debido a que se ha comprobado empíricamente que la frecuencia relativa del número dos, obtenida cuando el dado se lanza una gran cantidad de veces bajo condiciones similares, es aproximadamente 1/6. //

El concepto de probabilidad como frecuencia relativa es razonable intuitivamente. Sin embargo, presenta varias limitaciones que le impiden convertirse en una definición científica de probabilidad. Una limitación es que depende del número de repeticiones del experimento, es decir, las probabilidades empíricas son sólo aproximaciones de los valores límites. Además, depende de la existencia de condiciones similares para repetir el experimento y en la práctica existen muchos problemas donde ellas no se cumplen, especialmente en experimentos con seres humanos o que deben realizarse en cortos períodos de tiempo. Finalmente, existe la posibilidad que en algunos casos la frecuencia relativa no se acerque a un valor límite.

1.2.3 Interpretación subjetiva de probabilidad

En esta interpretación, la probabilidad se considera como una medida del grado de creencia racional que tiene una persona sobre la ocurrencia de un suceso. Así, la probabilidad que una persona asignaría a un posible resultado de algún experimento aleatorio representaría su propio juicio de la posibilidad de que se obtuviera dicho resultado. El cálculo está basado en lo que esa persona crea y la información relativa a ese experimento; otra persona con otras creencias y diferente información puede asignar otra probabilidad al mismo resultado.

Este enfoque es útil en aquellos casos en que no es posible utilizar ninguna teoría para calcular probabilidades a priori o concebir una serie de repeticiones para obtener probabilidades a posteriori.

Ejemplo 4

¿Cuál es la probabilidad de que ocurra un terremoto en una determinada ciudad antes de que termine el presente siglo? //

Existen dos dificultades principales con esta interpretación:

a) La posibilidad de que el juicio de una persona respecto a la ocurrencia de un número determinado de eventos sea completamente consistente y también libre de contradicciones es humanamente imposible.

b) La interpretación subjetiva no provee bases científicas para que dos o más científicos trabajando juntos en un área de interés común lleguen a una evaluación similar.

1.3. MODELOS PROBABILÍSTICOS: EL ENFOQUE AXIOMÁTICO

Uno de los objetivos principales de la teoría de la probabilidad es construir modelos para describir eventos en el mundo real.

Para poder incluir tanto los enfoques clásico (a priori), frecuencial (a posteriori) o subjetivo de la probabilidad, evitando así los inconvenientes de cada uno de ellos, la teoría de la probabilidad ha tenido que desarrollarse a partir de un enfoque matemático o axiomático, basándose en un conjunto de axiomas inspirados por resultados de los enfoques frecuenciales y clásicos.

Un concepto central es el de espacio muestral asociado a un experimento conceptual. Cada resultado posible del experimento conceptual en estudio será definido como un punto muestral, y a la totalidad de los resultados posibles se le definirá como espacio muestral del experimento.

Un objetivo central en el desarrollo de una teoría de probabilidad es el de evaluar la probabilidad de ciertos resultados o colecciones de resultados del experimento bajo estudio.

El desarrollo axiomático se apoya fuertemente en la teoría de conjuntos, por esta razón, se hará un brevísimo repaso de algunos conceptos elementales de la teoría de conjuntos.

1.4. TEORÍA DE CONJUNTOS

El desarrollo de la teoría de las probabilidades se simplifica sustancialmente si se utiliza la teoría de conjuntos. Seguidamente se presentan algunos conceptos y teoremas básicos que facilitarán el estudio de la teoría de probabilidades.

1.4.1 Espacio muestral

En teoría de la probabilidad, el espacio muestral, denotado por S es el equivalente del conjunto universal U en teoría de conjuntos. Los elementos de U se llaman puntos muestrales en el espacio muestral S.

1.4.2 Subconjunto

Sean A y B dos conjuntos. Si cada elemento de A es también un elemento de B, entonces A es un subconjunto de B y se representa con: $A \subset B$ o $B \supset A$.

1.4.3 Conjuntos equivalentes o iguales.

Dos conjuntos A y B son equivalentes o iguales si $A \subset B$ y $B \subset A$, es decir, si A y B tienen los mismos elementos, lo que se indica con $A = B$.

1.4.4 Conjunto vacío

Si un conjunto A no contiene elementos o puntos, entonces A se denomina el conjunto vacío y se denota con $\varnothing$.

1.4.5 Complemento

El complemento de un conjunto A con respecto al espacio S denotado por $\overline{A}$, es el conjunto de todos los puntos que están en S pero no en A.

1.4.6 Unión de conjuntos

Sean A y B dos subconjuntos cualesquiera de S. El conjunto que incluye todos los puntos que están en A o que están en B, se define como la unión de A y B y se representa con $A \bigcup B$.

1.4.7 Intersección de conjuntos

Sean A y B dos subconjuntos cualesquiera de S. El conjunto que incluye todos los puntos que están en A y que están en B, se define como la intersección de A y B y se representa con $A \bigcap B$ o simplemente AB.

1.4.8 Diferencia de conjuntos

Sean A y B dos subconjuntos cualesquiera de S. El conjunto de todos los puntos de A que no están en B se define como el conjunto diferencia y se representa con $A - B$.

1.4.9 Conjuntos disjuntos o mutuamente excluyentes

Los subconjuntos A y B de S se definen como mutuamente excluyentes o disjuntos sí $A \bigcap B = \varnothing$. En general, los subconjuntos A_1, A_2, A_3, ... son mutuamente excluyentes o disjuntos si $A_i \bigcap B_j = \varnothing$, para todo $i \neq j$.

TEOREMA 1. Leyes conmutativas

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ A\cup B = B\cup A \\ &\text{b)}\ A\cap B = B\cap A \end{aligned} \tag{1}$$

TEOREMA 2. Leyes asociativas

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C \\ &\text{b)}\ A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C \end{aligned} \tag{2}$$

TEOREMA 3. Leyes distributivas

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C) \\ &\text{b)}\ A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C) \end{aligned} \tag{3}$$

TEOREMA 4

$$A\cap S = A;\ A\cup S = S;\ A\cap\varnothing = \varnothing;\ A\cup\varnothing = A \tag{4}$$

TEOREMA 5

$$A\cap\overline{A} = \varnothing;\ A\cup\overline{A} = S;\ A\cap A = A;\ A\cup A = A \tag{5}$$

TEOREMA 6. Leyes de Morgan

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \left(\overline{A\cup B}\right) = \overline{A}\cap\overline{B} \\ &\text{b)}\ \left(\overline{A\cap B}\right) = \overline{A}\cup\overline{B} \end{aligned} \tag{6}$$

TEOREMA 7

$$A - B = A \cap \overline{B} \tag{7}$$

TEOREMA 8

Si A y B son subconjuntos cualesquiera de S, entonces:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \ A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \\ &\text{b)}\ \ (A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \varnothing \end{aligned} \tag{8}$$

TEOREMA 9

Si $A \subset B$, entonces, $A \cap B = A$ y $A \cup B = B$ (9)

1.5. MÉTODOS DE CONTEO

Cuando un espacio muestral tiene un número finito de puntos, se puede contar sus elementos o puntos muestrales haciendo simplemente una lista completa de ellos o desarrollando fórmulas de conteo que simplifiquen esta tarea, especialmente cuando el espacio muestral contiene una gran cantidad de elementos.

1.5.1 Principio fundamental

El principio fundamental del conteo, también denominado la Regla de la Multiplicación, se define de la siguiente manera: "Si un evento puede realizarse de n_1 maneras diferentes, un segundo evento puede realizarse de n_2 maneras diferentes, un tercer evento de n_3 maneras diferentes y así sucesivamente, entonces, el número de maneras en que los eventos pueden realizarse en el orden indicado es el producto $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \cdot \cdot$".

Ejemplo 5

Una placa de automóvil consta de dos letras distintas seguidas de tres dígitos, de los cuales el primero no puede ser cero, ¿cuántas placas diferentes pueden hacerse?

Puede hacerse: $27 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 631\ 800$ placas diferentes.

1.5.2 Notación factorial

Se define como n factorial al producto de los enteros positivos desde 1 hasta n, ambos inclusive, y se denota $n!$ tal que:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot .... \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \tag{10}$$

Además, se define: $0! = 1$.

1.5.3 Permutaciones

Una permutación es un arreglo ordenado de objetos. El número de maneras en que se pueden ordenar n objetos diferentes tomándolos r a la vez, se denota ${}_nP_r$, en donde $0 < r \leq n$.

Ejemplo 6

Considere el siguiente conjunto: { A, B, C }. En este conjunto de tres elementos existen tres tipos de permutaciones posibles, esto es, dependiendo de si r = 1, 2 o 3.

a) Permutaciones de un sólo elemento, 3 en total: A, B, C
b) Permutaciones de dos elementos, 6 en total: AB, BA, AC, CA, BC, CB.
c) Permutaciones de tres elementos, 6 en total: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Por ejemplo para el caso b), utilizando el principio fundamental del conteo para calcular el número de permutaciones posibles de los tres elementos A, B, C, tomando dos a la vez, se tiene que el primer elemento puede obtenerse de tres formas diferentes y el segundo puede obtenerse de dos formas diferentes. Así, el número de permutaciones posibles es 3 x 2 = 6. //

En general, si tenemos n objetos diferentes numerados de 1 a n, el número de permutaciones que pueden hacerse si tomamos r a la vez puede deducirse de la siguiente manera.

El primer objeto puede extraerse de n formas diferentes, el segundo de n-1 formas, y el último de n-(r-1) maneras, por lo que el número de permutaciones es:

$$ {}_{n}P_{r} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(r-1)] $$

$$ {}_{n}P_{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [(n-r)+1] \cdot (n-r)!}{(n-r)!} $$

$$ {}_{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{11} $$

Ejemplo 7

Si una urna contiene 6 bolas numeradas del 1 al 6, ¿cuántas permutaciones pueden hacerse si tomamos 3 a la vez?

Pueden hacerse:

$$ {}_{6}P_{3} = \frac{6!}{(6-3)!} = 120 \text{ permutaciones}. \quad // $$

En el caso especial en que n = r, se tiene que:

$$ {}_{n}P_{n} = n! \tag{12} $$

Cuando se tienen n objetos entre los que n_1 objetos son de la misma clase, n_2 de otra clase y así sucesivamente, hasta n_k

objetos iguales entre sí, el número total de permutaciones de los n objetos, está dado por:

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \ldots n_k!} \tag{13}$$

Ejemplo 8

¿Cuántas señales diferentes pueden formarse con 8 banderas colocadas en línea, donde hay 4 banderas rojas, 3 blancas y una azul?

Pueden formarse:

$$\frac{8!}{4!\ 3!\ 1!} = 280 \text{ señales diferentes. } //$$

Muchos problemas del análisis combinatorio se refieren a la extracción de bolas de una urna que contiene una cantidad n. Cuando se extraen bolas una tras otra, devolviéndose la anterior antes de extraer la siguiente, se tiene una muestra ordenada con reemplazo. El total de maneras diferentes de extraer con reemplazo r bolas es:

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{\text{r veces}} = n^r \tag{14}$$

Si cada bola no se devuelve a la urna antes de extraer la siguiente, entonces se tiene una muestra ordenada sin reemplazo y es simplemente una permutación de n objetos tomando r a la vez.

Ejemplo 9

El número total de muestras diferentes ordenadas de 4 bolas que se pueden obtener extrayendo bolas de una urna que contiene 8 bolas (numeradas de 1 a 8) es:

a) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^4 = 4\ 096$ si el muestreo es con reemplazo.

b) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = {}_8P_4 = 1\ 680$ si el muestreo es sin reemplazo.

1.5.4 Combinaciones

Todas las permutaciones que contienen los mismos elementos representan una combinación, es decir, una combinación es un subconjunto de r elementos seleccionados sin importar el orden, de un conjunto de n elementos diferentes, donde $0 < r \leq n$. El total de combinaciones posibles se denota ${}_nC_r$.

Ejemplo 10

Las combinaciones y permutaciones posibles de las letras a, b, c, d tomadas tres a la vez son:

Combinaciones	**Permutaciones**					
abc	abc	acb	bac	bca	cab	cba
abd	abd	adb	bad	bda	dab	dba
acd	acd	adc	cad	cda	dac	cda
bcd	bcd	bdc	cbd	cdb	dbc	dcb

Se puede observar que el número de combinaciones es 4, mientras que el número de permutaciones es 24. De cada una de las cuatro posibles combinaciones existen 6 posibles permutaciones, pues, aunque abc y acb son permutaciones diferentes, estas conforman la misma combinación de letras, pues en ellas no importa el orden o posición que las letras ocupen.

En este caso, el número de combinaciones multiplicado por 3! reproduce el número de permutaciones y en general, se puede decir que:

$$r!\ {}_nC_r = {}_nP_r$$

lo que implica:

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{15}$$

Para el ejemplo anterior, se tiene que el número de combinaciones de 4 letras tomadas 3 a la vez es:

$$ {}_4C_3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

El número de combinaciones de las 4 letras tomando 2 a la vez será:

$$ {}_4C_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

Ejemplo 11

De un grupo de 20 personas debe seleccionarse un comité compuesto de 8. ¿De cuántas maneras puede conformarse éste?

Puede conformarse de:

$$ {}_{20}C_8 = \frac{20!}{8!(20-8)!} = 125\ 970 \text{ maneras}.$$

Ejemplo 12

Para el ejemplo anterior, calcular la probabilidad que Juan y María, dos personas que forman parte del grupo, sean seleccionadas para integrar el comité.

Esta probabilidad es igual a:

$$ {}_{20}C_8 = \frac{{}_2C_2 \cdot {}_6C_{18}}{125\,970} = \frac{1 \cdot 18\,564}{125\,970} = 0{,}147 $$

1.6. CONDICIONES "NECESARIA" Y "SUFICIENTE"

Se debe distinguir entre diferentes condiciones utilizadas muy frecuentemente en diversos teoremas, en particular, entre "necesario", "suficiente" y "necesario y suficiente". Sean P_1 y P_2 dos proposiciones no idénticas.

1.6.1 Condición suficiente $P_1 \Rightarrow P_2$

"Si P_1 es cierta, entonces P_2 es cierta". Se acostumbra también expresar como: "P_1 implica P_2". P_1 es una condición suficiente para P_2, cuando por ejemplo P_1 es el evento "ser madre" y P_2 es el evento "ser mujer". Obviamente la maternidad manifiesta, es una condición suficiente de que se es mujer.

1.6.2 Condición necesaria $P_1 \Leftarrow P_2$

Si P_1 es la proposición "hoy es sábado" y P_2 es "mañana es domingo", entonces, si P_1 no es cierta concluimos que P_2 no es cierta tampoco, equivalentemente, P_2 es cierta sólo si P_1 es cierta. Aquí P_1 es una condición necesaria para P_2. Nótese que una condición suficiente puede ser o no ser una condición necesaria.

Similarmente una condición necesaria puede ser o no ser una condición suficiente.

Un ejemplo de una condición suficiente pero no necesaria es "ser madre" como condición para "ser mujer", puesto que es posible ser mujer sin ser madre. Si se dice que "ser mujer" es condición para "ser madre" se tiene un ejemplo de una condición necesaria pero no suficiente, puesto que ser mujer no es suficiente para ser madre.

El último ejemplo muestra una propiedad universal de una relación suficiente: "Si P_1 es suficiente para P_2, entonces P_2 es necesaria para P_1".

1.6.3 Condición necesaria y suficiente $P_1 \Leftrightarrow P_2$

"Si P_1 entonces P_2 y si P_2 entonces P_1". Esta condición se describe como "si y sólo si"; por ejemplo, "si y sólo si hoy es sábado" "mañana es domingo", es decir, el hecho de que la proposición "hoy es sábado" sea verdadera no sólo es una condición suficiente sino necesaria para que la proposición "mañana es domingo" también lo sea.

1.7. DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD

Antes de presentar la definición formal de probabilidad es importante repasar algunas definiciones útiles para el desarrollo de esta sección.

1.7.1 Espacio muestral

Espacio muestral es la colección de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio conceptual. Se le representa con S.

1.7.2 Evento

Evento es un subconjunto del espacio muestral. La clase de todos los eventos asociados a un experimento particular se llama espacio de eventos. Esta clase se puede siempre seleccionar para que sea lo suficientemente amplia como para que incluya todos aquellos subconjuntos (eventos) cuya probabilidad sea de interés.

Cuando el espacio muestral contiene un número finito de puntos solamente, el espacio de eventos correspondiente se tomaría como la clase de todos los subconjuntos del espacio muestral.

El interés principal en teoría de la probabilidad es calcular la probabilidad de que ocurra un evento particular. Un evento A ocurre si y sólo si el experimento produce un resultado que pertenece a A.

El espacio de eventos, que se representa con $\mathcal{A}$ debe tener las siguientes características:

a) $S \in \mathcal{A}$

b) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $\overline{A} \in \mathcal{A}$ (16)

c) Si $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

En la formulación que sigue se asumirá que el espacio de eventos posee las anteriores características.

1.7.3 Función

Una función $f(\cdot)$ con dominio A y codominio B es una colección de pares ordenados (a,b) que satisfacen:

a) $a \in A$ y $b \in B$.

b) Cada $a \in A$ ocurre como el primer elemento de algún par ordenado en la colección. Cada $b \in B$ no es necesariamente el segundo elemento de algún par ordenado.

c) No existen dos pares ordenados distintos en la colección que posean el mismo primer elemento.

Por lo tanto, una función $f(\cdot)$ es una ley que asocia cada punto del dominio con uno y sólo un punto en el codominio.

1.7.4 Función indicadora

Sea S el espacio muestral con puntos **w** y sea A cualquier subconjunto de S. La función indicadora de A denotada por $I_A(\cdot)$, es la función con dominio S y codominio {0,1}, definida como:

$$I_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \in A \\ 0 & \text{si } w \notin A \end{cases} \tag{17}$$

Ejemplo 13

Sea la función $f(\cdot)$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 1 \\ 2x & \text{para } 1 < x \leq 2 \\ 3x^2 & \text{para } x > 2 \end{cases}$$

Utilizando la función indicadora, la función $f_X(x)$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$f(x) = 2x\, I_{(1,2]}(x) + 3x^2\, I_{(2,\infty]}(x)$$

1.7.5 Función de probabilidad

Sea S el espacio muestral y $\mathcal{A}$ la colección de eventos de interés. Una función de probabilidad P es una función con dominio $\mathcal{A}$ y codominio definido en el intervalo [0,1], que satisface los siguientes axiomas:

a) $P(A) \geq 0$ para cada $A \in \mathcal{A}$.

b) $P(S) = 1$ (18)

c) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ si $A_1, A_2, \cdots$, es una sucesión de eventos mutuamente excluyentes en el espacio $\mathcal{A}$.

Estos axiomas están motivados por las definiciones de la probabilidad clásica y de la frecuencia relativa.

TEOREMA 10

$$P(\emptyset) = 0 \tag{19}$$

TEOREMA 11

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son mutuamente excluyentes, entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \tag{20}$$

En particular se tiene que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

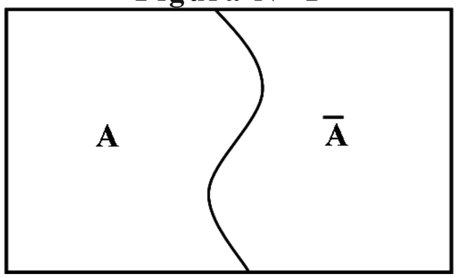
TEOREMA 12

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{21}$$

Ejemplo 14

Si la probabilidad de que un niño al nacer sea varón es 0,51, obviamente la probabilidad de que sea niña será de 0,49. Sea A el evento de que sea varón. En el diagrama de Venn de la Figura Nº 1 se muestran las respectivas probabilidades.

Figura Nº 1



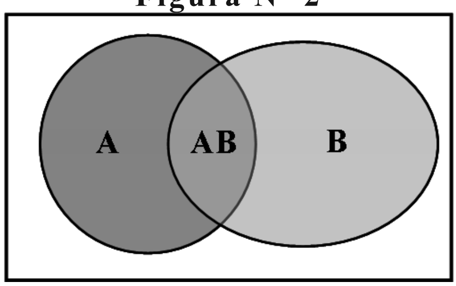
En general, cuando los eventos no son mutuamente excluyentes se tiene lo siguiente:

TEOREMA 13

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{22}$$

Este teorema establece que la probabilidad de A o B o de ambas, es la probabilidad de A más la probabilidad de B, menos la probabilidad de que ambos eventos ocurran simultáneamente.

Figura Nº 2



Ejemplo 15

Considere la probabilidad de que una carta extraída aleatoriamente de una baraja de 52 cartas sea de oros o sea un cinco.

Sea A el evento de que la carta sea de oros.

Sea B el evento de que la carta sea un cinco.

Entonces:

$P(A) = 13/52$	puesto que hay 13 cartas de oros de un total de 52.
$P(B) = 4/52$	puesto que hay 4 cincos.
$P(A\ B) = 1/52$	puesto que sólo hay una carta de oros que es cinco.

Por lo que:

$$P(A \cup B) = 13/52 + 4/52 - 1/52 = 16/52 \quad //$$

Ejemplo 16

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado, se obtenga un 1 o un 2?

$$P(`1' \cup `2') = P(`1') + P(`2') - P(`1' \cap `2')$$

$$= 1/6 + 1/6 - 0 = 1/3$$

Este ejemplo nos muestra que cuando los eventos son mutuamente excluyentes, se tiene que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, puesto que dos eventos son mutuamente excluyentes si y sólo si su intersección es el conjunto vacío.

TEOREMA 14

Si dos conjuntos cualesquiera son mutuamente excluyentes entonces:

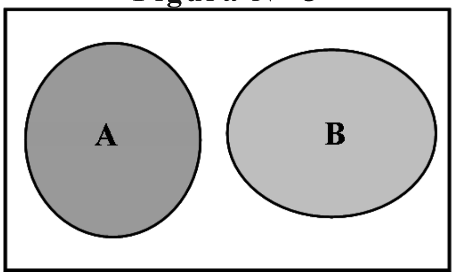
$$P(AB) = 0 \tag{23}$$

La Figura 3 ilustra este teorema, el cual puede extenderse a cualquier número de eventos mutuamente excluyentes.

En general, si A_1, A_2, A_3, ..., A_n son mutuamente excluyentes, entonces:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n) = 0$$

Figura N° 3



1.8. PROBABILIDAD CONJUNTA Y PROBABILIDAD MARGINAL

Se examinarán ahora eventos que no son mutuamente excluyentes. Consideremos, por ejemplo, la situación donde se selecciona aleatoriamente una persona de una cierta población y se investigan dos características. La primera es la costumbre de asistir al estadio, que denotaremos con S cuando sí se tiene la costumbre de asistir y N cuando no se tiene; y la segunda característica es el sexo, denotado por H cuando sea hombre y M cuando sea mujer. Las dos características no son mutuamente excluyentes.

El espacio muestral es { (H,S), (H,N), (M,S), (M,N) }. La distribución de los individuos de la población se puede resumir de la siguiente forma:

SEXO	ASISTENCIA AL ESTADIO		TOTAL
	S	N	
H	a	b	a+b
M	c	d	c+d
TOTAL	a+c	b+d	n

donde n = a + b + c + d es el total de personas en la población. En términos de probabilidades la distribución sería:

SEXO	ASISTENCIA AL ESTADIO		TOTAL
	S	N	
H	P(HS)	P(HN)	P(H)
M	P(MS)	P(MN)	P(M)
TOTAL	P(S)	P(N)	1

Las probabilidades que involucran intersecciones de conjuntos se denominan "probabilidades conjuntas". Por ejemplo, P(MS) es la probabilidad de que una persona seleccionada aleatoriamente sea mujer y tenga la costumbre de asistir al estadio, es decir, que tenga las dos características conjuntamente.

Las probabilidades que aparecen en la última fila o en la última columna se denominan probabilidades marginales. Por ejemplo, P(M) nos da la probabilidad de que al seleccionar una persona aleatoriamente esta sea mujer, independientemente de sus preferencias por asistir al estadio; P(S) es la probabilidad de que sí asista al estadio, independientemente del sexo.

Nótese el uso de la palabra total para identificar la última columna y la última fila. Esto se debe a que las probabilidades marginales son iguales a la suma de las probabilidades conjuntas correspondientes.

Por ejemplo: P(M) = P(MS) + P(MN) puesto que los eventos MS y MN son mutuamente excluyentes. También es obvio que:

a) P(HS) + P(HN) + P(MS) + P(MN) = 1

b) P(S) = 1 - P(N)

Ejemplo 17

De una encuesta realizada a 400 personas se obtuvieron los siguientes resultados:

SEXO	ASISTENCIA AL ESTADIO		TOTAL
	S	N	
H	60	150	210
M	15	175	190
TOTAL	75	325	400

Las probabilidades conjuntas y marginales calculadas con las fórmulas explicadas anteriormente, se muestran en la siguiente tabla:

SEXO	ASISTENCIA AL ESTADIO		TOTAL
	S	N	
H	0,150	0,375	0,525
M	0,038	0,438	0,475
TOTAL	0,188	0,813	1,000

En cuanto a las probabilidades conjuntas se puede concluir, por ejemplo, que un 15% de las personas entrevistadas son hombres y conjuntamente tienen la costumbre de asistir al estadio. De igual manera, un 43,8% son mujeres y no acostumbran asistir al estadio.

Considerando las probabilidades marginales, se tiene por ejemplo que, un 47,5% de las personas entrevistadas son mujeres, independientemente de si tienen o no la costumbre de ir al estadio. De forma análoga, un 81,3% no acostumbran asistir al estadio, independientemente de si son hombres o mujeres. //

1.9. PROBABILIDAD CONDICIONAL

Consideremos ahora los siguientes problemas: ¿cuál es la probabilidad de que una persona de un sexo dado asista al estadio?, o ¿cuál es la probabilidad de que una persona que acostumbre ir al estadio sea hombre? Las anteriores probabilidades son llamadas probabilidades condicionales.

Para representar la probabilidad de que una persona asista al estadio condicionado a que es mujer, se usará la notación P(S|M).

En nuestro ejemplo:

$$P(S \mid M) = \frac{c}{c+d}$$

Similarmente, la probabilidad de que una persona que haya asistido al estadio sea mujer está dada por:

$$P(M \mid S) = \frac{c}{a+c}$$

Las probabilidades anteriores se pueden escribir como:

$$P(S \mid M) = \frac{c/n}{(c+d)/n} = \frac{P(MS)}{P(M)}$$

$$P(M \mid S) = \frac{c/n}{(a+c)/n} = \frac{P(MS)}{P(S)}$$

Lo anterior motiva la siguiente definición:

Definición

Si A y B son subconjuntos de un espacio muestral discreto y $P(B) \neq \varnothing$ entonces:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\text{Probabilidad conjunta de A y B}}{\text{Probabilidad marginal de B}} \quad (24)$$

Nótese que:

a) $P(A|B)$ y $P(B|A)$ son iguales si y sólo si:

$$P(A) = P(B)$$

b) $P(A|B)$ no necesariamente implica que hay orden cronológico entre A y B. No interesa si B ocurrió antes, simultáneamente o después de A.

Ejemplo 18

¿Cuál es la probabilidad de obtener el número 4 en el lanzamiento de un dado perfectamente equilibrado, si se sabe que ocurrió un número par?

Se define A como "el evento de obtener el número 4" y B como "el evento de obtener un número par" con el propósito de encontrar la probabilidad del evento A dado que ocurrió el evento B. La probabilidad de la ocurrencia de A y B simultáneamente implica la observación de un 4, por lo que la probabilidad conjunta P(AB) = 1/6; además, P(B) = 1/2, entonces, utilizando la definición anterior se tiene:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$$

1.10. INDEPENDENCIA DE EVENTOS

Suponga que lanzamos una moneda equilibrada (sin alterar) dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado del segundo lanzamiento sea escudo dado que el resultado del primer lanzamiento también lo fue?

Sea E_1 el evento correspondiente a "escudo en el i-ésimo lanzamiento", en donde i = 1, 2; entonces:

$$P(E_2 \mid E_1) = \frac{P(E_1E_2)}{P(E_1)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$$

El resultado muestra que la probabilidad de obtener un escudo en el segundo lanzamiento dado que obtuvimos un escudo en el primero es 1/2. Obsérvese que 1/2 es precisamente la probabilidad de obtener un escudo en cualquier lanzamiento sin importar lo que haya ocurrido en el primero.

Tales eventos para los cuales la ocurrencia de otro evento no afecta de ninguna manera su probabilidad de ocurrencia, son denominados eventos independientes. Así, si A es independiente de B, se tiene que:

$$P(A \mid B) = P(A) \tag{25}$$

Esto es, la probabilidad condicional de A dado B es igual a la probabilidad marginal de A.

Si A y B son independientes, $P(B) \neq 0$, y dado que:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

se tiene entonces que:

$$P(A \mid B) = P(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

de donde $P(AB) = P(A)P(B)$.

Así, se tiene el siguiente teorema:

TEOREMA 15

Si $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$, entonces A y B son independientes si y sólo si:

$$P(AB) = P(A)\,P(B) \tag{26}$$

En otras palabras, A y B son independientes si y sólo si la probabilidad conjunta es igual al producto de sus respectivas probabilidades marginales.

Este teorema puede ser generalizado a cualquier número de eventos. En particular, los eventos A_1 , A_2 , A_3 , ... , A_n , son independientes si y sólo si:

$$P(A_1\, A_2 \cdots A_n) = P(A_1)\,P(A_2) \cdots P(A_n) \tag{27}$$

Ejemplo 19

Considere el experimento de lanzar dos dados perfectamente equilibrados. Se define A como "el evento de obtener par en el total de puntos obtenidos" y B como "el evento de obtener un 3 en el primer dado". Se tiene que:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{3/36}{1/6} = 1/2 = P(A)$$

por lo que los eventos A y B son independientes. //

TEOREMA 16. Teorema de probabilidades totales

Si B_1 , B_2 , ... , B_n es una colección de eventos mutuamente excluyentes que satisfacen lo siguiente:

a) $S = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$

b) $P(B_i > 0)$ para i=1, 2, 3,...,n

entonces, para cualquier evento A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)\, P(B_i)$$

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + ... + P(A \mid B_n)P(B_n) \qquad (28)$$

Ejemplo 20

Tres máquinas A, B y C producen respectivamente 50%, 30% y 20% del número total de artículos de una fábrica. Los porcentajes de artículos defectuosos producidos por estas máquinas, en su orden son 3%, 4% y 5%.

Si se selecciona al azar un artículo, hallar la probabilidad de que el artículo sea defectuoso.

Sea D el evento de que un artículo sea defectuoso.

$$P(D) = P(D \mid A)\, P(A) + P(D \mid B)\, P(B) + P(D \mid C)\, P(C)$$

$$P(D) = (0{,}03)\,(0{,}5) + (0{,}04)\,(0{,}3) + (0{,}05)\,(0{,}2) = 0{,}037$$

$$P(D) = 0{,}037$$

TEOREMA 17. Fórmula de Bayes

Si B_1 , B_2 , ... , B_n es una colección de eventos mutuamente excluyentes que satisfacen lo siguiente:

a) $S = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$

b) $P(B_i > 0)$ para i=1, 2, 3,...,n

entonces, para cualquier evento A con P(A) > 0 se tiene que:

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \mid B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)} \tag{29}$$

Ejemplo 21

Considere la fábrica del ejemplo anterior, se selecciona un artículo al azar y resulta defectuoso. Hallar la probabilidad de que ese artículo haya sido producido por la máquina A.

Sea D el evento de que un artículo sea defectuoso.

$$P(A \mid D) = \frac{P(D \mid A)P(A)}{P(D \mid A)P(A) + P(D \mid B)P(B) + P(D \mid C)P(C)}$$

$$P(A \mid D) = \frac{(0{,}03)(0{,}5)}{(0{,}3)(0{,}5) + (0{,}04)(0{,}3) + (0.05)(0{,}2)} = \frac{0{,}015}{0{,}037} = 0{,}405$$

1.11. EJERCICIOS

1. Una caja contiene 2 bolas negras, 3 blancas y 4 rojas y se extraen dos bolas sin reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea negra y la segunda blanca?

2. ¿Cuál es la probabilidad de que al arrojar dos dados equilibrados, la suma de los números que aparecen hacia arriba exceda a 10, dado que al menos uno de ellos es 6?

3. La urna I contiene 1 bola blanca y 3 negras, la urna II contiene 3 blancas y 2 negras. Una urna se escoge aleatoriamente y se extrae una bola de ella. Suponiendo que la bola extraída es negra, ¿cuál es la probabilidad de que la urna escogida haya sido la I?

4. Considere dos eventos A y B cualesquiera tales que P(A) = 0,4 y P(B) = 0,7. Determine el valor máximo y el valor mínimo que podría tomar P(AB) y las condiciones bajo las cuales se obtendría cada uno.

5. Sean A y B sucesos independientes, además sea la P(AB) = 0,18 y P(B) = 0,72. Calcule la P(A).

6. Una caja contiene 24 bombillos, de los cuales 4 son defectuosos. Si una persona selecciona 10 de ellos aleatoriamente y otra toma el resto, ¿cuál es la probabilidad de que los 4 bombillos defectuosos sean obtenidos por la misma persona?

7. Se van a elegir cuatro personas de un grupo formado por tres estudiantes no graduados y cuatro estudiantes graduados en Economía para ocupar ciertos puestos en una comisión. Encuentre la probabilidad de que se encuentren exactamente dos no graduados entre los cuatro escogidos.

8. Si tenemos que $P(A) = 0,5$ y $P(A \cup B) = 0,6$, encuentre $P(B)$.

   a) Si A y B son mutuamente excluyentes.
   b) Si A y B son independientes.
   c) Si $P(A/B) = 0,4$.

9. Si A y B son independientes, $P(A) = 1/3$ y $P(\overline{B}) = 1/4$. Encuentre: $P(A \cup \overline{B})$.

10. Si A y B son mutuamente excluyentes, ¿pueden ser eventos independientes?

11. Demuestre que:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

12. Considere dos urnas: la primera de las cuales tiene 1 bola roja y 4 blancas y la segunda tiene 2 rojas y 2 blancas. Se elige una urna al azar y de ella se extrae una bola que resulta ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido elegida la primera urna?

13. El supervisor de planta en una industria tiene a su cargo a tres hombres y tres mujeres. Debe elegir aleatoriamente a dos trabajadores para una tarea especial. Si X es el número de hombres en el grupo elegido, determine la distribución de probabilidad para la variable aleatoria X.

14. Una forma de promover el ahorro de energía es ofrecer descuentos a los clientes que mantienen un consumo de energía por debajo de ciertas normas de subsidio establecidas. Un reciente reporte informa que el 70% de los habitantes han reducido suficientemente el uso de energía eléctrica para poder disfrutar de los descuentos. Si se seleccionan al azar cinco clientes, encuentre la probabilidad de que:

a) los cinco califican para tarifas más favorables,
b) al menos tres califican para tarifas más favorables.

15. Un grupo de tres estudiantes universitarios y cinco graduados están dispuestos a cubrir algunos puestos que el gobierno destina para ellos. Si se elige aleatoriamente a cuatro de ellos, determine la probabilidad de que dos estudiantes no graduados estén entre los cuatro elegidos.

16. Una caja con 100 empaques contiene 10 con defectos del tipo A, 5 con defectos del tipo B y 2 con defectos de ambos tipos, ¿cuál es la probabilidad de que al extraer un empaque, este tenga defectos del tipo B, suponiendo que tiene defectos del tipo A?

17. Dos amigos A y B participan en un juego que consiste en lanzar una moneda. Si ambas caras superiores muestran cruces, A gana un dólar, si muestran caras, gana dos dólares, si lo que muestran las monedas no coinciden (una cara y otra cruz) pierde un dólar. Determine la distribución de probabilidades de las ganancias Y en un juego.

18. Una encuesta hecha a 500 estudiantes de una Universidad matriculados en Economía, Administración y Estadística durante un semestre, reveló la siguiente información:

Economía	329
Economía y Administración	83
Administración	186
Economía y Estadística	217
Estadística	295
Administración y Estadística	63

a) ¿Cuántos estudiantes están matriculados en los tres cursos?
b) ¿Cuántos estudiantes están matriculados en Economía pero no en Estadística?
c) ¿Cuántos estudiantes están matriculados en Administración pero no en Economía?

d) ¿Cuántos estudiantes están matriculados en Estadística pero no en Administración?
e) ¿Cuántos estudiantes están matriculados en Economía o Estadística pero no en Administración?

19. En un curso de inglés básico se matriculan 5 estudiantes varones y 4 estudiantes mujeres. En el curso de inglés medio se matriculan 7 hombres y 3 mujeres y en el curso de inglés avanzado se matriculan 4 hombres y 4 mujeres. Se selecciona aleatoriamente un estudiante del curso básico y se transfiere al curso medio, luego un estudiante es seleccionado del curso medio y resulta ser hombre:

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante transferido sea hombre?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante transferido sea mujer?

20. Las probabilidades de que un misil estalle durante el lanzamiento o que sufra una falla en su sistema de dirección en vuelo son 0,0002 y 0,0005 respectivamente, calcule las probabilidades de que el misil,

    a) no estalle durante el lanzamiento.
    b) estalle durante el despegue o sufra una falla su sistema de dirección en pleno vuelo.
    c) ni explote durante el despegue, ni sufra una falla su sistema de dirección en pleno vuelo.

21. Dos proveedores A y B entregan la misma pieza a un fabricante, el cual almacena todas las existencias en un sólo lugar. Los registros muestran que el 5% de las piezas entregadas por A y el 9% de las piezas de B son defectuosas, además, que A entrega cuatro veces más piezas que B. Si se selecciona aleatoriamente una pieza de la bodega y se encuentra que está en buenas condiciones, ¿cuál es la probabilidad de que la haya fabricado A?

22. En una población se conoce que el 40% de los electores votarán por el Partido A y el 60% por el Partido B. Se informa que 30% de los partidarios de A y 70% de los de B están a favor de un decreto electoral. Una persona elegida aleatoriamente está a favor del decreto. Determine la probabilidad condicional de que ésta sea partidaria de B.

23. Suponga que el 30% de las botellas producidas en una cierta fábrica son defectuosas. Si una botella es defectuosa, la probabilidad de que un inspector la remueva de la línea de llenado es de 0,9. Si no es defectuosa, la probabilidad de que el inspector crea que es defectuosa y la remueva es 0,2.

    a) Si la botella es removida de la línea de llenado, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?
    b) Si un consumidor compra el producto, ¿cuál es la probabilidad de que la botella sea defectuosa?

24. Un estudiante contesta una pregunta que ofrece cuatro soluciones posibles en un examen de opción múltiple. Supongamos que la probabilidad de que el estudiante sepa la respuesta a la pregunta es de 0,8 y la probabilidad de que tenga que contestar al azar es de 0,2, suponga además que la probabilidad de seleccionar la respuesta correcta es de 0,25. Si el estudiante contesta correctamente la pregunta, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sepa la respuesta correcta?

25. Dos fabricantes de turbinas denominados A y B, analizan la posibilidad de participar en una licitación para la venta de motores a una planta hidroeléctrica y cuya concesión dependerá del monto de los ofrecimientos. La empresa A presenta su oferta y la probabilidad es ¾ de que obtenga la licitación, siempre y cuando que la empresa B no la presente. Las posibilidades están 4 a 1 a favor de que B sí la presente; y si lo hace, la probabilidad de que A pueda colocar su turbina es solamente 1/3.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que A pueda vender la turbina?
b) Si A gana la licitación, ¿cuál es la probabilidad de que B no haya presentado su propuesta?

26. Se ha observado que los hombres y las mujeres reaccionan de una manera diferente en ciertas circunstancias; 70% de las mujeres reaccionan positivamente en dichas circunstancias, mientras que el porcentaje en los hombres es solamente del 40%. Se sometió a prueba a un grupo de 20 personas, 15 hombres y 5 mujeres, y se les pidió llenar un cuestionario para descubrir sus reacciones. Una respuesta escogida al azar de las 20 resultó negativa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido contestada por un hombre?

FRANCISCO GARRO MOLINA

Profesor de la Escuela de Estadística de la Universidad de Costa Rica desde 1986 y Director de Demanda Eléctrica en el Centro Nacional de Planificación Eléctrica del Instituto Costarricense de Electricidad. Licenciado en Estadística con énfasis en Administración de Negocios en la Universidad de Costa Rica y Diplomados en Análisis Estadístico de Datos (CIENES, Santiago de Chile), Economía de la Energía (IDEE, Bariloche, Argentina), Gerencia (INCAE, Costa Rica) y Regulación de la Energía (Universidad de Comillas, Madrid).
fgarro@ice.co.cr

OSCAR HERNÁNDEZ RODRÍGUEZ

Catedrático de la Escuela de Estadística de la Universidad de Costa Rica desde 1971. Ha obtenido varios títulos en la Universidad de Costa Rica: Bachiller en Matemática de la Escuela de Matemáticas, Licenciado de la Escuela de Estadística y Licenciado de la Escuela de Economía. Posee posgrados de universidades inglesas: M.Sc en Estadística-Matemática (Universidad de Birmingham) y M.Phil (Escuela de Economía de la Universidad de Londres). Fue Director de la Escuela de Estadística y Director del Posgrado en Estadística. Actualmente concluye el Doctorado en Filosofía en la Universidad de Costa Rica.
ohernand@cariari.ucr.ac.cr

Este libro proporciona los fundamentos de la teoría de las probabilidades y de la estadística que necesita el estudiante de economía para iniciar el estudio de la econometría y comprender sus principios y resultados generales.

Aunque se diseñó para servir como texto del curso XS-0104 Introducción a la Teoría Estadística, que la Escuela de Estadística de la Universidad de Costa Rica imparte a los estudiantes de la Escuela de Economía, su material también es útil a estudiantes de otras disciplinas (estadística, ingeniería, agronomía, etc.).

En el Capítulo 1 se desarrollan los conceptos y teoremas básicos de la teoría de las probabilidades. En los Capítulos 2 y 3 se describen las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas y continuas para el caso univariante y multivariante, respectivamente. La distribución de funciones de variables aleatorias se trata en el Capítulo 4. El Capítulo 5 proporciona los conceptos básicos de muestra aleatoria y distribuciones muestrales que son importantes para comprender los fundamentos de la inferencia estadística: estimación puntual y por intervalos (Capítulo 6) y contraste de hipótesis (Capítulo 7).

En esta segunda edición se han ampliado algunos temas y agregado otros. También se han incluido nuevos ejercicios y ejemplos en cada capítulo.