

Jesús Sánchez Guevara

ÁLGEBRA

lineal fundamental

TEORÍA Y EJERCICIOS

Jesús Sánchez Guevara

ÁLGEBRA

lineal fundamental

TEORÍA Y EJERCICIOS



512.5

S212a

Sánchez Guevara, Jesús, 1983-

Álgebra lineal fundamental : teoría y ejercicios

/ Jesús Sánchez Guevara. – Primera edición. – San

José, Costa Rica : Editorial UCR, 2020.

xvi, 265 páginas : ilustraciones en gris.

ISBN 978-9968-46-931-9

1. ÁLGEBRA LINEAL. 2. ÁLGEBRA LINEAL
– PROBLEMAS, EJERCICIOS, ETC. 3. ÁLGEBRA
LINEAL – ESTUDIO Y ENSEÑANZA. I. Título.

CIP/3611

CC.SIBDI.UCR

Edición aprobada por la Comisión Editorial de la Universidad de Costa Rica.

Primera edición: 2020.

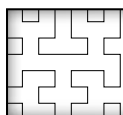
Editorial UCR es miembro del Sistema Editorial Universitario Centroamericano (SEDUCA),
perteneciente al Consejo Superior Universitario Centroamericano (CSUCA).

Corrección filológica y revisión de pruebas: *Ariana Alpizar L.* • Diseño de contenido y diagramación: el autor.
Portada: *Priscila Coto M.* • Ilustración de portada: “*Antecedentes de la arquitectura abstracta. Diseño
gráfico mínimo. Papel de escritorio geométrico blanco. Representación 3d*”, <https://www.shutterstock.com>,
ilustración de Max Krasnov • Control de calidad: *Abraham Ugarte S.*

© Editorial de la Universidad de Costa Rica, Ciudad Universitaria Rodrigo Facio. San José, Costa Rica.
Prohibida la reproducción total o parcial. Todos los derechos reservados. Hecho el depósito de ley.

Impreso bajo demanda en la Sección de Impresión del SIEDIN. Fecha de aparición: octubre, 2020.
Universidad de Costa Rica. Ciudad Universitaria Rodrigo Facio. San José, Costa Rica.

Apdo. 11501-2060 • Tel.: 2511 5310 • Fax: 2511 5257 • administracion.siedin@ucr.ac.cr • www.editorial.ucr.ac.cr



Contenido

Introducción	xi
Recomendaciones para la lectura	xv
Primera Parte	1
Capítulo 1. Matrices	3
1.1. Matrices	3
1.2. Álgebra de matrices	5
1.3. Referencias útiles	9
1.4. Ejercicios matrices	10
1.5. Soluciones matrices.	13
Capítulo 2. Sistemas de ecuaciones lineales	17
2.1. Sistemas lineales	17
2.2. Métodos de resolución	20
2.3. Tipos de soluciones.	27
2.4. Rango y nulidad de una matriz	29
2.5. Referencias útiles	31
2.6. Ejercicios sistemas de ecuaciones lineales . . .	32
2.7. Soluciones sistemas de ecuaciones lineales . . .	37

Capítulo 3. Matrices invertibles	47
3.1. Matriz inversa	47
3.2. Matrices elementales	49
3.3. Idempotencia y nilpotencia	51
3.4. Referencias útiles	51
3.5. Ejercicios matrices invertibles	53
3.6. Soluciones matrices invertibles	55
Capítulo 4. Determinantes	59
4.1. La función determinante	59
4.2. Matrices inversas y determinantes	62
4.3. Regla de Cramer	63
4.4. Referencias útiles	63
4.5. Ejercicios determinantes	65
4.6. Soluciones determinantes	67
Segunda Parte	71
Capítulo 5. Geometría vectorial	73
5.1. Vectores	73
5.2. Geometría de vectores	76
5.3. Rectas y planos	80
5.4. Referencias útiles	83
5.5. Ejercicios geometría vectorial	84
5.6. Soluciones geometría vectorial	87
Capítulo 6. Espacios vectoriales	93
6.1. Espacios vectoriales	93
6.2. Subespacios vectoriales	95
6.3. Generadores e independencia lineal	98
6.4. Bases y dimensión	100
6.5. Matrices	102
6.6. Coordenadas	103
6.7. Referencias útiles	104

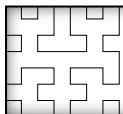
6.8.	Ejercicios espacios vectoriales	106
6.9.	Soluciones espacios vectoriales	109
Capítulo 7. Transformaciones lineales		113
7.1.	Transformaciones lineales	113
7.2.	Matriz de una transformación lineal	115
7.3.	Cambios de base	118
7.4.	Inyectividad y sobreyectividad	121
7.5.	Transformaciones invertibles	122
7.6.	Referencias útiles	123
7.7.	Ejercicios transformaciones lineales	124
7.8.	Soluciones transformaciones lineales	129
Tercera Parte		133
Capítulo 8. Ortogonalidad		135
8.1.	Conjuntos ortogonales y ortonormales	135
8.2.	Subespacios ortogonales	137
8.3.	Proyecciones ortogonales	138
8.4.	Proceso de Gram-Schmidt	139
8.5.	Referencias útiles	141
8.6.	Ejercicios ortogonalidad	142
8.7.	Soluciones ortogonalidad	145
Capítulo 9. Diagonalización		149
9.1.	Vectores y valores propios	149
9.2.	Diagonalización	152
9.3.	Matrices simétricas	156
9.4.	Referencias útiles	159
9.5.	Ejercicios diagonalización	160
9.6.	Soluciones diagonalización	167

Capítulo 10. Curvas cuadráticas	177
10.1. Formas cuadráticas	177
10.2. Curvas cuadráticas	179
10.3. Superficies cuadráticas	185
10.4. Referencias útiles	197
10.5. Ejercicios curvas cuadráticas	198
10.6. Soluciones curvas cuadráticas	201
 Anexos	 207
A. Exámenes del I-semester 2018	209
Examen de suficiencia	211
Solución del examen de suficiencia	213
Primer examen parcial	219
Solución del primer examen parcial	221
Segundo examen parcial	225
Solución del segundo examen parcial	227
Tercer examen parcial	231
Solución del tercer examen parcial	233
Examen de ampliación	241
Solución del examen de ampliación	243
 B. Software	 249
B.1. Scilab	249
B.2. Geogebra.	253
B.3. Wolfram Alpha	255
 Bibliografía	 257
 Índice analítico	 259
 Acerca del autor	 265

A 4x4 grid of 16 squares, each containing a different black and white geometric pattern. The patterns are variations of a 3x3 grid with one or more squares missing or filled. The patterns are as follows:

- Top-left: 3x3 grid with the top-right square missing.
- Top-middle: 3x3 grid with the top-left square missing.
- Top-right: 3x3 grid with the top-left and top-middle squares missing.
- Middle-left: 3x3 grid with the top-right and bottom-right squares missing.
- Middle-middle: 3x3 grid with the top-left and bottom-left squares missing.
- Middle-right: 3x3 grid with the top-left and top-middle squares missing.
- Bottom-left: 3x3 grid with the top-right and bottom-right squares missing.
- Bottom-middle: 3x3 grid with the top-left and bottom-left squares missing.
- Bottom-right: 3x3 grid with the top-left and top-middle squares missing.

CAPÍTULO 1



Matrices

1.1. Matrices

DEFINICIÓN 1.1. Una *matriz* A de números reales con n filas y m columnas es un arreglo rectangular de $n \cdot m$ números reales de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

En tal caso, se dice que la matriz A es de tamaño $n \times m$. El conjunto de matrices reales de tamaño $n \times m$ se denota $M(n, m; \mathbb{R})$. Para $i \in \{1, \dots, n\}$ y $j \in \{1, \dots, m\}$, el número real de la matriz A que se encuentra en la fila i y columna j se escribe a_{ij} y se le llama entrada ij de A . Para referirse a la matriz A es usual usar la notación $A = (a_{ij})_{n \times m}$, o bien, simplemente $A = (a_{ij})$, si el tamaño de la matriz no es ambiguo.

LISTA 1.2. Los principales tipos de matrices son los siguientes:

■ **Matrices columna:** Son las matrices que solamente tienen una columna, también se les conoce como *vectores columna*. El conjunto de matrices columna de tamaño n es $M(n, 1; \mathbb{R})$.

■ **Matrices fila:** Estas matrices están formadas por una sola fila y se les conoce también como *vectores fila*. El conjunto de matrices fila de tamaño m es $M(1, m; \mathbb{R})$.

■ **Matriz nula:** A la única matriz de $M(n, m; \mathbb{R})$ con todas sus entradas iguales a 0 se le llama matriz nula y se denota $0_{n \times m}$ o simplemente 0.

■ **Matriz cuadrada:** Se dice de la matriz que tiene igual cantidad de filas y columnas. El conjunto de matrices cuadradas de n filas y n columnas se escribe $M(n; \mathbb{R})$. La diagonal de una matriz cuadrada está formada por sus entradas de la forma a_{ii} .

■ **Matrices diagonales:** Son aquellas matrices $D = (d_{ij}) \in M(n; \mathbb{R})$ que satisfacen que $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

■ **Matriz identidad:** En el conjunto $M(n; \mathbb{R})$, a la única matriz diagonal, con exclusivamente unos en su diagonal, se le llama matriz identidad de tamaño n . Es denotada I_n , o bien, I .

■ **Matriz triangular superior:** Se dice de la matriz $P = (p_{ij}) \in M(n; \mathbb{R})$ que solo tiene ceros bajo su diagonal, es decir, que satisface $p_{ij} = 0$ si $i > j$.

■ **Matriz triangular inferior:** Se dice de la matriz $Q = (q_{ij}) \in M(n; \mathbb{R})$ que solo tiene ceros sobre su diagonal, es decir, que satisface $q_{ij} = 0$ si $i < j$.

■ **Matriz simétrica:** $A = (a_{ij}) \in M(n; \mathbb{R})$ se llama simétrica si $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$. En otras palabras, la entrada en la fila i y columna j de A es igual a la entrada en la fila j y columna i .

■ **Matriz antisimétrica:** $B = (b_{ij}) \in M(n; \mathbb{R})$ se llama antisimétrica si $b_{ij} = -b_{ji}$, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$. La condición implica que los elementos de la diagonal son todos 0.

1.2. Álgebra de matrices

DEFINICIÓN 1.3 (Igualdad de matrices). Sean A y $B \in M(n, m; \mathbb{R})$. Se dice que $A = (a_{ij})_{n \times m}$ y $B = (b_{ij})_{n \times m}$ son iguales si y solo si entrada por entrada son iguales, es decir, $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y $j \in \{1, \dots, m\}$.

DEFINICIÓN 1.4 (Producto de una matriz por un escalar). Para todo $A = (a_{ij})_{n \times m} \in M(n, m; \mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se define la matriz $\alpha A = (c_{ij})_{n \times m} \in M(n, m; \mathbb{R})$ como $c_{ij} = \alpha a_{ij}$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y $j \in \{1, \dots, m\}$. Si $\alpha = -1$ la matriz $-1A$ se escribe $-A$.

PROPOSICIÓN 1.5. Para $A \in M(n, m; \mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, el producto por un escalar satisface:

- (i) $1A = A$.
- (ii) $0A = 0_{n \times m}$.
- (iii) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

DEFINICIÓN 1.6 (Suma de matrices). Sean A y $B \in M(n, m; \mathbb{R})$. La suma de $A = (a_{ij})_{n \times m}$ y $B = (b_{ij})_{n \times m}$ se define como la matriz $A + B = (c_{ij})_{n \times m} \in M(n, m; \mathbb{R})$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y $j \in \{1, \dots, m\}$.

PROPOSICIÓN 1.7. Si $A, B, C \in M(n, m; \mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces la suma de matrices verifica que:

- (i) $A + B = B + A$. (iv) $A + (-A) = 0_{n \times m}$.
- (ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$. (v) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- (iii) $A + 0_{n \times m} = A$. (vi) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

DEFINICIÓN 1.8. Sean $A_1, \dots, A_r \in M(n, m; \mathbb{R})$. Una *combinación lineal* de las matrices $A_1, \dots, A_r$ es cualquier matriz de la forma $\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_r A_r$, donde $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$.

DEFINICIÓN 1.9. Sea $A \in M(n, m; \mathbb{R})$. La *matriz transpuesta* de $A = (a_{ij})_{n \times m}$, denotada $A^t = (c_{ij})_{m \times n}$, es la matriz de $M(m, n; \mathbb{R})$ que satisface $c_{ij} = a_{ji}$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y $j \in \{1, \dots, m\}$.

OBSERVACIÓN 1.10. Note que si v es un vector fila, entonces v^t es un vector columna; y que si w es un vector columna, entonces w^t es un vector fila.

OBSERVACIÓN 1.11. Si A es una matriz con cantidades de filas y columnas diferentes, entonces la suma $A + A^t$ no está definida, ya que son matrices de diferente tamaño. Tal imposibilidad desaparece en las matrices cuadradas.

PROPOSICIÓN 1.12. Para $A, B \in M(n, m; \mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, la transpuesta cumple con lo siguiente:

- (i) $(A^t)^t = A$. (ii) $(A + \alpha B)^t = A^t + \alpha B^t$.

DEFINICIÓN 1.13. Considere $v = (v_{11}, \dots, v_{1n})$ un vector fila y $w = (w_{11}, \dots, w_{n1})^t$ un vector columna, ambos con la misma cantidad de entradas. Se define el *producto escalar* de v y w como el número real $v \cdot w$ que se obtiene de la siguiente forma:

$$v \cdot w = (v_{11}, \dots, v_{1n}) \cdot \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix} = v_{11}w_{11} + v_{12}w_{21} + \dots + v_{1n}w_{n1}.$$

PROPOSICIÓN 1.14. Sean $v, v_1, v_2 \in M(1, n; \mathbb{R})$ vectores fila, $w, w_1, w_2 \in M(n, 1; \mathbb{R})$ vectores columna y $\alpha \in \mathbb{R}$. El producto escalar satisface las siguientes propiedades:

- (i) $v \cdot w = w^t \cdot v^t$.
- (ii) $(\alpha v) \cdot w = v \cdot (\alpha w) = \alpha(v \cdot w)$.
- (iii) $v \cdot (w_1 + w_2) = v \cdot w_1 + v \cdot w_2$.
- (iv) $(v_1 + v_2) \cdot w = v_1 \cdot w + v_2 \cdot w$.

DEFINICIÓN 1.15 (Producto de matrices). Considere $A = (a_{ij})_{n \times p} \in M(n, p; \mathbb{R})$ y $B = (b_{ij})_{p \times m} \in M(p, m; \mathbb{R})$. La matriz $AB = (c_{ij})_{n \times m}$, llamada *producto* de A y B , es una matriz en $M(n, m; \mathbb{R})$, tal que cada una de sus entradas c_{ij} está dada por el siguiente producto escalar:

$$c_{ij} = (\text{fila } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B).$$

OBSERVACIÓN 1.16. Explícitamente, la fórmula para la entrada c_{ij} del producto AB es:

$$c_{ij} = (a_{i1}, \dots, a_{ip}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{ip}b_{pj}.$$

COMENTARIO 1.17. El producto de matrices no siempre es conmutativo, es decir, en general $AB \neq BA$.

PROPOSICIÓN 1.18. Considere $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y A, B, C matrices. El producto de matrices, siempre que esté definido, cumple con:

- (i) $A(BC) = (AB)C$.
- (ii) $A(B + C) = AB + AC$.
- (iii) $(A + B)C = AC + BC$.
- (iv) $I_n A = A = A I_m$.

$$(v) \quad \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

$$(vi) \quad (AB)^t = B^t A^t.$$

$$(vii) \quad AB + \alpha A = A(B + \alpha I).$$

$$(viii) \quad AB + \beta B = (A + \beta I)B.$$

COMENTARIO 1.19. Sean $C \in M(1, n; \mathbb{R})$ y $A \in M(n, m; \mathbb{R})$. Si $f_1, \dots, f_n$ son las filas de A , entonces

$$CA = (c_{11}, \dots, c_{1n}) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = c_{11}f_1 + \cdots + c_{1n}f_n.$$

La igualdad anterior nos indica que el producto $CA \in M(1, m; \mathbb{R})$ se puede interpretar como el vector fila resultado de la combinación lineal de las filas de A , con las entradas de C como coeficientes. Así, el resultado de un producto de matrices BA , donde $B \in M(q, n; \mathbb{R})$, se puede ver como el recuento de hacer combinaciones lineales con las filas de A , una combinación por cada fila de B .

En la situación reflejo, cuando $D \in M(m, 1; \mathbb{R})$ y $c_1, \dots, c_m$ son las columnas de A , se tiene:

$$AD = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} \\ \vdots \\ d_{m1} \end{pmatrix} = d_{11}c_1 + \cdots + d_{m1}c_m.$$

Esto dice que el resultado es una combinación lineal de columnas de A . Cuando se tiene un producto AB , con $B \in M(m, r; \mathbb{R})$, el resultado sería un recuento de combinaciones lineales de columnas de A , determinadas por las columnas de B .

1.3. Referencias útiles

Para estudiar la materia

- Del libro [Arce *et al.*, 2014], secciones: 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4.
- Del libro [Grossman y Flores, 2012], secciones: 2.1 y 2.2.

Ejercicios recomendados

- Del libro [Arce *et al.*, 2014], sección 2.8, ejercicios: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 44 y 46.

1.4. Ejercicios matrices

1.4.1. En cada caso, escriba la matriz especificada e indique con cuáles tipos de la Lista 1.2 encaja. Las igualdades que describen las entradas de las matrices están definidas para todo i, j según el tamaño de la matriz.

- (a) $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, tal que $a_{ij} = (-1)^i$.
- (b) $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, tal que $a_{ij} = (-1)^{i+j}$.
- (c) $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, tal que $a_{ij} = (-1)^{ij}$.
- (d) $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, tal que $b_{ij} = 2i + j - 1$.
- (e) $B = (b_{ij})_{4 \times 4}$, tal que $b_{ij} = i - j$.
- (f) $C = (c_{ij})_{3 \times 3}$, tal que $c_{ij} = -(j-1)(j-3)i$.
- (g) $D = (d_{ij})_{4 \times 4}$, tal que $d_{ij} = (i-1)(i-2)(i-4)(j-1)(j-4)$.
- (h) $D = (d_{ij})_{2 \times 2}$, tal que $d_{ij} = (2-i)(a(2-j) + b(j-1)) + (i-1)(c(2-j) + d(j-1))$.

1.4.2. Escriba una versión para matrices 3×3 del punto (h) del ejercicio 1.4.1.

1.4.3. Realice los siguientes cálculos para las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -5 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -5 \\ 8 & -5 & -8 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ -6 & -7 & -2 \\ -8 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

- (a) $2A + B - 2C$.
- (b) $2(A - B) + 3C$.
- (c) $A^t + 2(B + C)^t$.
- (d) $(A + C + I)^t - (B + C + I)^t$.

1.4.4. En cada caso, escriba dos ejemplos de matrices que cumplan con la condición respectiva.

(a) $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ con $a_{ij} = 0$ si $i = j$.

(b) $C = (c_{ij})_{3 \times 4}$ con $c_{ij} = -c_{i+1,j}$.

(c) $C = (c_{ij})_{2 \times 2}$, tal que $c_{11}c_{22} = c_{12}c_{21} + 1$.

(d) $E = (e_{ij})_{3 \times 3}$, tal que $e_{1j} + e_{2j} + e_{3j} = \frac{1}{j}$.

(e) $B = (b_{ij})_{2 \times 4}$, tal que $b_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si } i > j \\ 3 & \text{si } i < j \end{cases}$.

(f) $D = (d_{ij})_{3 \times 4}$, tal que $d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ d_{i+1,j+1} & \text{si } i = j \end{cases}$.

1.4.5. Muestre cada una de las siguientes propiedades del álgebra de matrices.

(a) A es simétrica si y solo si $A^t = A$.

(b) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) $A(B + C) = AB + AC$.

(d) $(A + B)^t = A^t + B^t$.

1.4.6. En cada caso, haga los cálculos con la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 2 \\ 0 & -9 & 7 \\ 9 & 4 & -9 \end{pmatrix}.$$

(a) $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 3A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) $(A - xI) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $(x, y, x) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}$.

1.4.7. De manera similar al álgebra de números reales, si una matriz A es cuadrada, para todo entero $n \geq 1$, A^n se entiende como el producto de A consigo misma n veces y a la matriz A^n se le llama potencia n -ésima de A . Calcule las siguientes potencias de matrices.

$$(a) \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3}) & -\sin(\frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix}^6 \quad (b) \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}^3.$$

1.4.8. Realice los siguientes cálculos.

$$(a) AB - BA, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$(b) A^3B^4 + A^4B^5 - 2A^5B^6, \text{ donde}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(c) (2A + B)^t - (2B - A)^t + A^2, \text{ con } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } a, b \in \mathbb{R}, \text{ tal que } b \neq 0.$$

$$(d) (I + A + A^2)(I - A), \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.4.9. En cada caso, determine las incógnitas.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}. \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$(c) (x, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (9, 1). \quad (d) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}^t.$$

1.5. Soluciones matrices

1.5.1. R/

$$(a) \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(c) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(d) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$(e) \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(f) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(g) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(h) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

1.5.2. R/ Si $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$, entonces para todos los índices $i, j \in \{1, 2, 3\}$ se tiene que $a_{i,j} =$

$$\begin{aligned} & \frac{(2-i)(3-i)}{2} \left(\frac{a(2-j)(3-j)}{2} + b(j-1)(3-j) + \frac{c(j-1)(j-2)}{2} \right) \\ & + (i-1)(3-i) \left(\frac{d(2-j)(3-j)}{2} + e(j-1)(3-j) + \frac{f(j-1)(j-2)}{2} \right) \\ & + \frac{(i-1)(i-2)}{2} \left(\frac{g(2-j)(3-j)}{2} + h(j-1)(3-j) + \frac{k(j-1)(j-2)}{2} \right). \end{aligned}$$

1.5.3. R/

$$(a) \begin{pmatrix} -14 & -9 & -14 \\ 0 & 5 & -5 \\ 26 & -9 & -14 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \begin{pmatrix} 5 & 9 & 22 \\ -24 & -27 & 0 \\ -38 & 21 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(c) \begin{pmatrix} 11 & -21 & 1 \\ 3 & -20 & -3 \\ 8 & -16 & -25 \end{pmatrix}. \quad (d) \begin{pmatrix} -5 & -3 & -7 \\ 0 & -3 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.5.4. R/

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$(c) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & 2 \\ -4 & 1 & -2/3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(e) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(f) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.5.5. R/ Se toma $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$.

(a) $A = A^t$ si y solo si $a_{ij} = a_{ji}$, para todo i, j , que es la definición de ser simétrica.

(b) Tome $\alpha(A + B) = (c_{ij})$ y $\alpha A + \alpha B = (d_{ij})$. Ahora $c_{ij} = \alpha(a_{ij} + b_{ij}) = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij} = d_{ij}$ para todo i, j , por lo tanto $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

(c) Tome $A(B+C) = (l_{ij})$ y $AB+AC = (r_{ij})$. Entonces:

$$\begin{aligned}
 l_{ij} &= (a_{i1}, \dots, a_{im}) \cdot (b_{1j} + c_{1j}, \dots, b_{mj} + c_{mj})^t \\
 &= a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + \dots + a_{im}(b_{mj} + c_{mj}) \\
 &= (a_{i1}b_{1j} + a_{i1}c_{1j}) + \dots + (a_{im}b_{mj} + a_{im}c_{mj}) \\
 &= (a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{im}b_{mj}) + (a_{i1}c_{1j} + \dots + a_{im}c_{mj}) \\
 &= (a_{i1}, \dots, a_{im}) \cdot (b_{1j}, \dots, b_{mj})^t \\
 &\quad + (a_{i1}, \dots, a_{im}) \cdot (c_{1j}, \dots, c_{mj})^t \\
 &= r_{ij},
 \end{aligned}$$

lo que muestra la igualdad.

(d) La entrada (i, j) de $(A+B)^t$ es la entrada (j, i) de $A+B$, es decir, $a_{ji} + b_{ji}$, y esta es justamente la entrada (i, j) de $A^t + B^t$.

1.5.6. R/

(a) $\begin{pmatrix} 31 \\ 8 \\ -42 \end{pmatrix}.$

(b) $\begin{pmatrix} 6x + 9y + 2z + 1 \\ -9y + 7z + 1 \\ 9x + 4y - 9z + 1 \end{pmatrix}.$

(c) $\begin{pmatrix} 17 - x \\ -2 - x \\ 4 - x \end{pmatrix}.$

(d) $8x^2 + 20xy - 9y^2.$

1.5.7. R/

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(b) $\begin{pmatrix} x^3 & 0 & 0 \\ 0 & y^3 & 0 \\ 0 & 0 & z^3 \end{pmatrix}.$

1.5.8. $\mathbb{R}/$

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(c) \begin{pmatrix} -a/b & 3 & 0 \\ a & a^2 + 3a + b - 1 & ab + 3 \\ 1 & a + 3b & b - 1 \end{pmatrix}.$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

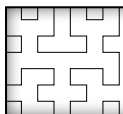
1.5.9. $\mathbb{R}/$

$$(a) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$(c) (x, y) = (1, -9).$$

$$(d) (x, y, z) = (9, 1, 2).$$



Acerca del autor

Jesús Sánchez Guevara nace en Puntarenas en 1983, es doctor en matemática pura por la Universidad de la Sorbona (París 7). Se desempeña como profesor de la Universidad de Costa Rica desde el año 2007. En el 2016 inicia como investigador para el Centro de Investigación en Matemática Pura y Aplicada(CIMPA-UCR) y durante los años 2018 y 2019 fue coordinador del curso MA1004 Álgebra Lineal de la Escuela de Matemáticas de la Universidad de Costa Rica. Sus principales intereses en investigación son la topología algebraica y la lógica matemática, en particular: homología simplicial, fibrados de Higgs, teoría de categorías, operads, topos y modelos. También, es autor del blog de divulgación matemática justcategories.wordpress.com, en el cual se pueden encontrar algunos de sus cursos virtuales impartidos para la Universidad de Costa Rica.

Esta es una
muestra del libro
en la que se despliega
un número limitado de páginas.

Adquiera el libro completo en la
Librería UCR Virtual.

LIBRERÍA
UCR

VIRTUAL

Este libro presenta una introducción al álgebra lineal desde el enfoque dado en el curso MA1004 Álgebra lineal para las carreras de Ingeniería y Ciencias Económicas de la Universidad de Costa Rica. La teoría se divide en tres partes, la primera estudia los principales conceptos del álgebra lineal, referentes a los sistemas de ecuaciones y matrices. En la segunda parte se analiza la naturaleza de estos objetos al verlos como funciones lineales entre espacios vectoriales. Finalmente, en la tercera parte, se exponen algunas aplicaciones como el análisis de sistemas ortogonales o la identificación de curvas cuadráticas. Los contenidos respetan el orden del curso MA1004 y cada capítulo incluye una lista de ejercicios resueltos que reflejan el nivel de complejidad utilizado en las pruebas del curso. Además, se incluye un anexo con los exámenes aplicados durante el segundo semestre del 2018, junto con su solución detallada. Así, este libro da al estudiante la maquinaria del álgebra lineal necesaria para poder hacer frente a cursos avanzados de su respectiva carrera y, además, busca que el estudiante llegue a ser capaz de identificar y entender las aplicaciones del álgebra lineal en su campo de estudio.

ISBN 978-9968-46-931-9



9 789968 469319


EDITORIAL
UCR