Introducción a la matemática formal desde las funciones

Floria Arias Tencio
Hugo Barrantes Campos

EDITORIAL UCR

Introducción a la matemática formal desde las funciones

Floria Arias Tencio
Hugo Barrantes Campos

EDITORIAL UCR

515.880.712
A696i Arias Tencio, Floria
Introducción a la matemática formal desde las funciones / Floria Arias Tencio, Hugo Barrantes Campos. – Primera edición digital – San José, Costa Rica : Editorial UCR, 2020.
1 recurso en línea (xii, 255 páginas) : ilustraciones en blanco y negro, grá icos en blanco y negro, archivo de texto, PDF, 2.4 MB.

ISBN 978-9968-46-943-2

1. FUNCIONES DE VARIABLE REAL – ENSEÑANZA SECUNDARIA. 2. FUNCIONES DE VARIABLE REAL -- PROBLEMAS, EJERCICIOS, ETC. 3. ANÁLISIS MATEMÁTICO. 4. LÓGICA SIMBÓLICA Y MATEMÁTICA. 5. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS. I. Barrantes Campos, Hugo, autor. II. Título.

CIP/3623
CC.SIBDI.UCR

Edición aprobada por la Comisión Editorial de la Universidad de Costa Rica
Primera edición impresa: 2010
Primera edición digital (PDF): 2020

Editorial UCR es miembro del Sistema Editorial Universitario Centroamericano (SEDUCA), perteneciente al Consejo Superior Universitario Centroamericano (CSUCA).

Corrección filológica, revisión de pruebas, diseño y diagramación: *Los autores.* • Control de calidad y diseño de portada: *Wendy Aguilar G.* • Realización del PDF: *Alonso Prendas V.* • Control de calidad de la versión digital: *Hazel Aguilar B.*

© Editorial de la Universidad de Costa Rica. Todos los derechos reservados. Prohibida la reproducción de la obra o parte de ella, bajo cualquier forma o medio, así como el almacenamiento en bases de datos, sistemas de recuperación y repositorios, sin la autorización escrita del editor.

Edición digital de la Editorial Universidad de Costa Rica. Fecha de creación: setiembre, 2020
Universidad de Costa Rica. Ciudad Universitaria Rodrigo Facio. San José, Costa Rica.

Apdo. 11501-2060 • Tel.: 2511 5310 • Fax: 2511 5257 • administracion.siedin@ucr.ac.cr • www.editorial.ucr.ac.cr

Contenido

Prefacio **XI**

1. Introducción a la Lógica **1**

1.1. Proposiciones compuestas 2

1.1.1. Negación 2

1.1.2. Conjunción 3

1.1.3. Disjunción 4

1.1.4. Condicional 5

1.1.5. Bicondicional 7

1.2. Construcción de tablas de verdad 9

1.3. Proposiciones equivalentes 12

1.4. Implicaciones lógicas 16

1.5. Demostraciones formales 19

1.6. Cuantificadores 24

1.6.1. Negación de Cuantificadores 27

2. Teoría de Conjuntos **33**

2.1. Nociones básicas 33

2.2. Operaciones con conjuntos 38

2.2.1. Unión 38

2.2.2. Intersección 39

2.2.3. Diferencia 41

2.2.4. Complemento 42

2.2.5. Producto Cartesiano 43

3. Relaciones Binarias **45**

4. Funciones reales de variable real **55**

4.1. Conceptos básicos 55

4.1.1. Concepto de función 55

4.1.2. Dominio máximo de una función 59

4.1.3. Ámbito o rango 61

4.2. Operaciones y características especiales 65

4.2.1. Operaciones con funciones 65

4.2.2. Inyectividad y sobreyectividad 67

4.2.3. Función inversa 70

4.2.4. Composición de funciones 72

4.3. Representación gráfica de funciones 78

4.3.1. Transformaciones de gráficas estándar 79

4.3.2. Transformaciones de gráficas 81

4.3.3. Funciones crecientes y decrecientes 85

4.3.4. Máximos y mínimos 87

4.3.5. Paridad de una función 88

4.3.6. Interpretación de la gráfica de una función 90

4.4. Funciones lineales y rectas 101

4.4.1. La función lineal 101

4.4.2. Ecuación de la recta 105

4.4.3. Rectas paralelas y perpendiculares 108

4.5. Funciones cuadráticas 116

4.5.1. Conceptos básicos 116

4.5.2. Gráfica de la función cuadrática 122

5. Función exponencial y función logarítmica **131**

5.1. Función exponencial 131

5.2. Función Logarítmica 136

5.3. Ecuaciones e inecuaciones 143
5.3.1. Ecuaciones exponenciales 143
5.3.2. Ecuaciones logarítmicas 145
5.3.3. Inecuaciones exponenciales y logarítmicas 146

6. Funciones trigonométricas **149**
6.1. Trigonometría para ángulos agudos 149
6.1.1. Medida de ángulos 149
6.1.2. Razones trigonométricas para ángulos agudos 153
6.1.3. Ángulos especiales 156
6.2. Trigonometría para ángulos de cualquier medida 161
6.2.1. Ángulos y rotaciones 162
6.2.2. El círculo trigonométrico 163
6.2.3. Ángulos especiales 166
6.2.4. Algunas propiedades 167
6.3. Las funciones trigonométricas 181
6.3.1. Definición de las funciones trigonométricas 181
6.3.2. Propiedades de las funciones trigonométricas 183
6.3.3. Gráficas de las funciones trigonométricas 188
6.4. Fórmulas de adición y sustracción 202
6.4.1. Identidades de la suma y la diferencia 203
6.4.2. Identidades del ángulo doble 206
6.4.3. Identidades del ángulo medio 208
6.4.4. Identidades de producto y suma 210
6.5. Ecuaciones trigonométricas 216
6.6. Algunas aplicaciones 224
6.6.1. Resolución de triángulos rectángulos 224
6.6.2. Ley de los senos 228
6.6.3. La ley de los cosenos 231
6.7. Las funciones trigonométricas inversas 238
6.7.1. El seno inverso 238

6.7.2. El coseno inverso 241
6.7.3. La tangente inversa 243
6.7.4. Otras funciones trigonométricas inversas 245

Bibliografía 249

Índice alfabético 251

Acerca de los autores 255

Capítulo 1

Introducción a la Lógica

En este capítulo estudiaremos los elementos iniciales de la lógica proposicional. Se trata de las nociones fundamentales para la expresión correcta de las ideas matemáticas y el planteamiento de demostraciones sencillas.

La lógica se ocupa de establecer métodos de razonamiento que separan los razonamientos válidos de los no válidos. Un razonamiento es una colección de proposiciones que llevan a una conclusión. De manera que el primer concepto fundamental de la lógica es la proposición.

Definición 1.1. Proposición o enunciado: es una afirmación que es falsa o verdadera pero no ambas.

Ejemplo 1.1. Son proposiciones, afirmaciones como las siguientes:

1. Luis vino a clases hoy.
2. Amaneció lloviendo.
3. $5 - 8 = 3$.
4. Leibniz es un matemático famoso. □

La veracidad o falsedad de una proposición se llama **valor de verdad**. Así por ejemplo, si hoy amaneció lloviendo, entonces el valor de verdad de la proposición (2), del ejemplo 1.1, es verdadero, de lo contrario su valor de verdad es falso.

Las proposiciones se denotan con letras minúsculas $p, q, r, \ldots$ No son proposiciones o enunciados expresiones como: una orden, una pregunta o bien una expresión que involucra variables no definidas.

Ejemplo 1.2. No son proposiciones:

1. Debes tener listo el material para mañana.
2. ¿Cúanto tiempo vas a estar aquí?
3. $x \div y = y \div x$. □

1.1. Proposiciones compuestas

Todos los ejemplos de proposiciones dados anteriormente son proposiciones simples. Una **proposición compuesta** es la combinación de dos o más proposiciones simples ligadas mediante conectivas. Son ejemplos de conectivas: y; o; si ..., entonces; etc.

Las proposiciones compuestas se denotan con letras mayúsculas. El valor de verdad de una proposición compuesta está determinado por el valor de verdad de cada una de las proposiciones simples que la conforman y por la o las conectivas involucradas. A continuación se detallan algunas de las conectivas lógicas.

1.1.1. Negación

Si p es una proposición, entonces "no p" es la **negación** de p. Para negar una proposición, se antepone el símbolo $\neg$ a la letra que denota la proposición original. La negación de una proposición también es posible expresarla anteponiendo la frase "es falso que" o "no se cumple que".

La negación de un enunciado resulta verdadera si el valor de verdad del enunciado original es falso, y la negación de un enunciado resulta falsa si el enunciado es verdadero. En otras palabras p y $\neg\, p$ siempre tienen valores de verdad opuestos.

Ejemplo 1.3. Sea "p: Acapulco es la capital de México", entonces la negación de p es "$\neg\, p$: Acapulco no es la capital de México".

Note que p es falsa de ahí que $\neg\, p$ es verdadera. □

Los valores de verdad de una proposición y su negación las representamos más brevemente en una tabla, llamada **tabla de verdad**, de la manera siguiente:

p	$\neg p$
1	0
0	1

En la primera columna colocamos los valores de verdad de la proposición original, denotada p, que puede ser verdadera o falsa, esto se indica 1 o 0 respectivamente. En la segunda columna, la nueva proposición $\neg p$, que resume: si p es verdadera, entonces $\neg p$ es falsa y si p es falsa, entonces $\neg p$ es verdadera.

1.1.2. Conjunción

Cuando dos proposiciones se combinan con la palabra "y", el enunciado resultante se llama conjunción. Para denotar la conjunción utilizamos el símbolo "$\wedge$"; $p \wedge q$ denota la proposición compuesta a partir de las proposiciones simples p, q.

Ejemplo 1.4. De las proposiciones simples:

p: Marta llegó tarde.

q: Marta presentó la prueba.

es posible construir proposiciones compuestas como las siguientes:

(a) Marta llegó tarde y presentó la prueba: $p \wedge q$.

(b) Marta llegó tarde y no presentó la prueba: $p \wedge \neg q$.

(c) Marta ni llegó tarde, ni presentó la prueba: $\neg p \wedge \neg q$. □

El valor de verdad de una proposición de la forma $p \wedge q$, depende de los valores de verdad de p y de q. Una conjunción es verdadera si ambas componentes son verdaderas y es falsa si alguna de las componentes es falsa. La siguiente tabla de verdad expone los valores de verdad que asume una conjunción en todos los casos posibles:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Ejemplo 1.5. La conjunción: "2 es un número primo e impar" es falsa porque una de las proposiciones es falsa. □

1.1.3. Disjunción

La proposición resultante de dos proposiciones conectadas con la palabra "o" se llama disjunción. Debe distinguirse entre dos tipos de disjunción, la inclusiva y la exclusiva.

Una **disjunción inclusiva** es aquella en la que la proposición resulta verdadera si al menos una de las proposiciones involucradas es verdadera.

Ejemplo 1.6. Disjunción inclusiva:

1. "Luis estudió francés o estudió inglés" es una proposición falsa solo si Luis no estudió ninguno de estos dos idiomas, de lo contrario es verdadera.

2. La disjunción "2 es un número primo o impar" es verdadera porque una de las proposiciones es verdadera. □

La disjunción inclusiva se denota con el símbolo "$\vee$" y su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Una **disjunción exclusiva** es aquella en la que la proposición resulta verdadera cuando exactamente una de las proposiciones es verdadera y la otra falsa.

Ejemplo 1.7. Disjunción exclusiva: "Cata irá hoy a las 8:00 pm al cine ó al teatro". Se trata de una disjunción exclusiva porque es verdadera si Cata fue al cine o al teatro y obviamente no pudo haber realizado ambas acciones. □

La disjunción exclusiva se denota con el símbolo $\underline{\vee}$ y su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \underline{\vee} q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

1.1.4. Condicional

Un **enunciado condicional** se obtiene al colocar la palabra "si" antes de la primera proposición y la palabra "entonces" antes de la segunda. La proposición que se encuentra entre el "si" y el "entonces" se llama **antecedente** y la proposición que aparece luego del "entonces" es el **consecuente**. El condicional, "si p, entonces q" se denota $p \to q$.

Ejemplo 1.8. Las siguientes son proposiciones condicionales:

(a) Si en un papel de tornasol azul se coloca un ácido, entonces el papel se volverá rojo.

(b) Si $\triangle ABC$ es equilátero, entonces es isósceles.

(c) Si el motor está funcionando, entonces tiene combustible.

(d) Si llueve, entonces hay nubes. □

En una proposición $p \to q$, el consecuente q es la **condición necesaria** y el antecedente p es la **condición suficiente**.

Ejemplo 1.9. (a) Es suficiente que llueva para que haya nubes. O bien:

(b) Es necesario que haya nubes para que llueva (pero no es suficiente).

(c) Es necesario que el motor tenga combustible para que trabaje (no es suficiente).

(d) Es suficiente que el motor trabaje para saber que tiene combustible. □

Un condicional es también llamado una implicación, el antecedente implica el consecuente.

Al igual que las conectivas anteriores, el valor de verdad de una implicación está determinado por los valores de verdad de sus proposiciones simples (antecedente y consecuente). La siguiente tabla de verdad muestra los valores de verdad que puede tomar un condicional:

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Note que el condicional resulta falso únicamente en el caso en el que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso. Es decir, para que $p \to q$ sea

falso debe ser verdadera la proposición compuesta: $p \wedge \neg q$, puesto que $p \wedge \neg q$ es verdadero solo si p es verdadero y q es falso y es presisamente en este caso donde $p \rightarrow q$ es falso. En conclusión, la negación de $p \rightarrow q$ es $p \wedge \neg q$; más adelante se detallaremos en este aspecto.

A partir de un condicional "$p \rightarrow q$", es posible formular otros condicionales que involucran a p y a q:

(a) **Recíproca:** $q \rightarrow p$ se llama la recíproca de $p \rightarrow q$. El valor de verdad de $p \rightarrow q$ no determina el valor de verdad de su recíproca $q \rightarrow p$.

Ejemplo 1.10. La proposición "Si dos águlos son alternos externos entre paralelas, entonces son congruentes"; es verdad mientras que su recíproca es falsa.

Sin embargo, la proposición "si n^2 es par, entonces n es par; $n \in \mathbb{N}$" es verdadera y su recíproca también lo es. □

(b) **Contrapositiva:** $\neg q \rightarrow \neg p$ se llama la contrapositiva de $p \rightarrow q$. El valor de verdad de $p \rightarrow q$ determina el valor de verdad de su contrapositiva. Es decir las proposiciones $p \rightarrow q$ y $\neg q \rightarrow \neg p$ poseen los mismos valores de verdad para los mismos valores de verdad en sus proposiciones simples.

Lo anterior puede apreciarse claramente observando sus tablas de verdad:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
1	1	0	0	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

Ejemplo 1.11. Las parejas de proposiciones siguientes corresponden a la proposición y su contrapositiva, note que cada pareja posee el mismo valor de verdad.

a_1) $x < 4 \rightarrow x < 2; x \in \mathbb{R}$.

a_2) $x \geq 2 \rightarrow x \geq 4; x \in \mathbb{R}$.

b_1) Si el lunes amanece lloviendo, entonces no vengo a clases.

b_2) Si vengo a clases el lunes, entonces no amaneció lloviendo. □

1.1.5. Bicondicional

La última conectiva de interés es el **bicondicional**, que se simboliza $\leftrightarrow$. Un enunciado bicondicional es la conjunción de dos condicionales, donde el antecedente de uno es el consecuente del otro y viceversa. Simbólicamente:

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P).$$

que se lee "P si y solo si Q es equivalente a P implica Q y Q implica P". La expresión "P si y solo si Q" se abrevia escribiendo "P sii Q".

Ejemplo 1.12. Las siguientes proposiciones son ejemplos de bicondicionales.

(a) La proposición: "Aumentar la producción implica bajar la pobreza y bajar la pobreza implica aumentar la producción" es equivalente a la afirmación: "Aumentar la producción si y solo si bajar la pobreza".

(b) "Un triángulo es equilátero si y solo si es equiángulo".

(c) $(a = 0 \vee b = 0) \leftrightarrow a \cdot b = 0; a, b \in \mathbb{R}$

Estas proposiciones también podemos leerlas de la siguiente forma:

(a) Aumentar la producción es necesario y suficiente para bajar la pobreza.

(b) Para que un triángulo sea equilátero es necesario y suficiente que sea equiángulo.

(c) Para que $a \cdot b = 0; a, b \in \mathbb{R}$, es necesario y suficiente que $a = 0$ o $b = 0$. □

Los valores de verdad de una proposición bicondicional están dados por la tabla

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Es decir un bicondicional es verdadero cuando sus dos proposiciones poseen el mismo valor de verdad, de lo contrario es falso.

Ejercicios 1.1

En los ejercicios 1 a 3 considere las proposiciones a, b, c siguientes:

a : "me levanto temprano".

b : "es lunes".

c : "voy a clases".

Traduzca cada proposición siguiente, usando notación lógica.

1. Es lunes y me levanto temprano.
2. Voy a clases o no me levanto temprano.
3. Ni me levanto temprano, ni voy a clases.

En los ejercicios 4 a 9 determine el valor de verdad de cada proposición, según los valores de verdad dados: p : falso, q : verdadero, r : falso.

4. $p \wedge q$
5. $p \wedge \neg q$
6. $(p \wedge q) \vee r$
7. $(\neg p \vee \neg q) \wedge r$
8. $\neg(p \vee q)$
9. $p \underline{\vee} \neg(q \wedge r)$

10. Suponga que $p \wedge q$ es verdadero, proporcione los valores de verdad para:

    a) $p \wedge \neg q$
    b) $p \vee q$
    c) $p \underline{\vee} q$
    d) $\neg p \wedge \neg q$
    e) $\neg(p \vee q)$

11. Si p es falso, ¿cuál es el valor de verdad de $\neg\neg p$?
12. Si la proposición $p \wedge \neg q$ resulta verdadera, ¿cuáles son los valores de verdad de p y q?
13. Si $p \underline{\vee} q$ es falsa, ¿cuál es el valor de verdad de $p \vee q$?

En los ejercicios 14 a 17 considere las proposiciones p, q y r siguientes:

p : "Es lunes",

q : "hace calor",

r : "me levanto temprano",

t : "voy a clase".

Traduzca cada proposición usando notación lógica.

14. Si es lunes, entonces me levanto temprano y voy a clases.
15. Si hace calor, entonces no me levanto temprano.

16. Voy a clases si y sólo si no hace calor.
17. Si no es lunes, ni hace calor, entonces no voy a clases.

En los ejercicios 18 a 21 enuncie la recíproca y la contrapositiva de cada proposición.

18. Si mejora su rendimiento, entonces ganará el curso.
19. Si no está lloviendo, entonces hace calor.
20. Si $x < 8$, entonces $x^2 < 64; x \in \mathbb{R}$.
21. Si $x^2 = 1$, entonces $x = 1$ ó $x = -1$.

1.2. Construcción de tablas de verdad

A partir de las tablas básicas estudiadas es posible determinar los valores de verdad de proposiciones que involucran dos o más conectivas, mediante el uso de tablas de verdad. No hay una única forma de plantear una tabla de verdad para una proposición, pero a continuación damos algunas sugerencias.

La tabla se inicia colocando tantas columnas como proposiciones simples haya involucradas y tantos renglones como posibles combinaciones haya entre los valores de verdad de cada una.

Colocamos, luego, una columna por cada conectiva, es decir se ordenan las proposiciones involucradas de la más simple a la más compleja. Utilizamos las tablas de verdad de cada conectiva, para determinar los valores de verdad en las nuevas columnas.

Ejemplo 1.13. Determinar los valores de verdad de $p \to (p \wedge \neg q)$.

Solución:

$p \to (p \wedge \neg q)$ es un condicional, cuyo consecuente es una conjunción. Para determinar sus valores de verdad se requiere de los valores de verdad de p (el antecedente) y de $(p \wedge \neg q)$. A su vez, para determinar el valor de verdad del consecuente se requiere de las tablas de verdad de la $\wedge$ y de la negación.

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$p \to (p \wedge \neg q)$
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

La proposición $p \to (p \wedge \neg q)$ es falsa únicamente en el caso en que p y q son verdaderas. □

Ejemplo 1.14. Determinar los valores de verdad de $(p \wedge r) \vee (q \rightarrow \neg r)$.

Solución:

$(p \wedge r) \vee (q \rightarrow \neg r)$ es la disjunción de una conjunción y una implicación. Hay involucradas tres proposiciones simples; por lo t anto, para iniciar la tabla se requiere de 3 columnas y 8 renglones (es decir, 2^3 posibles combinaciones entre los valores de verdad). Para determinar los valores de verdad de la disjunción, debe determinarse primero los valores de verdad de la conjunción $p \wedge r$ y los de la implicación $(q \rightarrow \neg r)$, esta última, requiere a su vez de los valores de verdad de $\neg r$; de ahí que un orden conveniente de las proposiciones sea el siguiente:

p	q	r	$p \wedge r$	$\neg r$	$q \rightarrow \neg r$	$(p \wedge r) \vee (q \rightarrow \neg r)$
1	1	1				1
1	1	0				1
1	0	1				1
1	0	0				1
0	1	1				0
0	1	0				1
0	0	1				1
0	0	0				1

Complete la tabla y verifique la última columna. □

Observe que hay varios detalles a la hora de confeccionar una tabla, ellos son útiles para garantizar una tabla correcta y completa:

1. Si la proposición en estudio contiene n proposiciones simples, entonces la tabla contiene 2^n renglones. Es decir, existen 2^n combinaciones entre los valores de verdad de cada proposición simple.

2. Para no repetir combinaciones el siguiente orden es útil: en la primera columna se coloca 2^{n-1} renglones verdaderos y 2^{n-1} falsos (esto es la mitad del total de filas); en la segunda columna y alternando, se colocan 2^{n-2} verdaderos y 2^{n-2} falsos; en la tercera columna y alternando se colocan 2^{n-3} verdaderos y 2^{n-3} falsos y así hasta la n-ésima columna que se coloca uno verdadero y otro falso.

TAUTOLOGÍAS Y CONTRADICCIONES

Se analizarán ahora dos tipos especiales de proposiciones: $P \vee \neg P$ y $P \wedge \neg P$, se han denotado en mayúsculas para resaltar la forma de las proposiciones y no el contenido. Se trata de proposiciones como:

Ejemplo 1.15. 1. Está lloviendo o no está lloviendo.

2. La camisa de Pablo es roja y no es roja.

3. Miguel Echandi fue presidente de Costa Rica o no fue presidente.

4. Graham Bell inventó el teléfono y no inventó el teléfono. □

Definición 1.2. Una **tautología** es una proposición que siempre es verdadera, independientemente de los valores de verdad de sus proposiciones simples.

Ejemplo 1.16. $P \vee \neg P$: es la disjunción de una proposición y su negación; donde P puede ser a su vez compuesta.

Independientemente de la forma de P (una conjunción o una disjunción, una negación o una implicación), como proposición que es, es verdadera o falsa, de ahí que toda proposición de la forma $P \vee \neg P$ tiene la siguiente tabla de verdad:

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
1	0	1
0	1	1

En otras palabras la proposición $P \vee \neg P$ independientemente de los valores de verdad de P, siempre es verdadera, de ahí que reciba el nombre de tautología. Ahora bien, no se está afirmando que toda tautología sea de la forma $P \vee \neg P$. □

Definición 1.3. Una **contradicción** es una proposición que siempre es falsa, independientemente de los valores de verdad de sus proposiciones simples.

Ejemplo 1.17. $P \wedge \neg P$: la conjunción de una proposición (simple o compuesta) y su negación tiene la siguiente tabla de verdad:

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
1	0	0
0	1	0

Es decir, independiente de los valores de verdad de P, la proposición $P \wedge \neg P$ es falsa, de ahí que se llama una contradicción. □

Ejercicios 1.2

En los ejercicios 1 a 5 construya la tabla de verdad de cada una de las proposiciones.

1. $(p \to r) \wedge (r \vee p)$
2. $(a \wedge b) \to r$
3. $\neg p \wedge (q \to r)$
4. $(p \wedge \neg q) \to (q \to r)$
5. $(p \wedge \neg q) \to [(r \vee q) \wedge p]$

En los ejercicios 6 a 9 muestre que las proposiciones son tautologías.

6. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
7. $(p \longrightarrow q) \to [(p \vee r) \to (q \to r)]$
8. $p \to (p \vee \neg q)$
9. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \underline{\vee} q)$

En los ejercicios 10 a 12, si la proposición $p \to q$ es falsa, determine el valor de verdad de cada una de las proposiciones.

10. $p \vee \neg q$
11. $\neg p \wedge \neg q$
12. $q \to p$
13. Muestre que la siguiente proposición es una contradicción:
    $(p \wedge \neg q) \wedge (p \to q)$

1.3. Proposiciones equivalentes

En páginas anteriores definimos el bicondicional de P y Q como:

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$$

Si planteamos por aparte las tablas de verdad de ambas proposiciones:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

observamos que éstas poseen los mismos valores de verdad para los mismos valores de verdad en sus proposiciones simples. Parejas de proposiciones como éstas, se denominan proposiciones lógicamente equivalentes.

Definición 1.4. Dos proposiciones son lógicamente **equivalentes** sii poseen los mismos valores de verdad, para los mismos valores de verdad en sus proposiciones simples.

Es posible afirmar también, que dos proposiciones R y T son lógicamente equivalentes si la proposición compuesta $R \leftrightarrow T$ resulta una tautología. De manera que, para mostrar la equivalencia de dos proposiciones se tienen dos opciones: plantear dos tablas de verdad, una con cada proposición, como se hizo arriba o bien, una sola tabla conectando ambas proposiciones con un bicondicional y obteniendo una tautología.

Ejemplo 1.18. Mostrar que las proposiciones $P : \neg(r \wedge t)$ y $Q : (\neg r \vee \neg t)$ son lógicamente equivalentes.

Solución:

Construimos una tabla de verdad en la que primero determinamos los valores de verdad de $\neg(r \wedge t)$ y los de $\neg r \vee \neg t$. Luego conectamos estas dos proposiciones con $\leftrightarrow$.

r	t	$r \wedge t$	$\neg(r \wedge t)$	$\leftrightarrow$	$\neg r \vee \neg t$	$\neg r$	$\neg t$
1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1

Se ha mostrado que $P \leftrightarrow Q$ es una tautología, de ahí que $P \equiv Q$. □

En la tabla 1, que aparece en la página 14, se presentan algunas equivalencias lógicas, que resultarán útiles para mostrar otras equivalencias más elaboradas. Estas reglas permiten mostrar la validez de un argumento. En todos los casos el lector puede plantear la tabla de verdad correspondiente y verificar así que se trata de tautologías.

A la mayoría de las equivalencias se le ha asignado un nombre que sugiere de qué propiedad se trata y, posterior a la tabla, aparecen algunos comentarios que le pueden ayudar a una mejor comprensión de la misma.

Tabla 1. Equivalencias lógicas

1. Doble negación
   $\neg\neg P \equiv P$
2. Leyes conmutativas
   (a) $P \vee Q \equiv Q \vee P$
   (b) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
   (c) $P \leftrightarrow Q \equiv Q \leftrightarrow P$
3. Leyes asociativas
   (a) $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$
   (b) $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
4. Leyes distributivas
   (a) $(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
   (b) $(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
5. Leyes de idempotencia
   (a) $P \vee P \equiv P$
   (b) $P \wedge P \equiv P$
6. Leyes de identidad [1]
   (a) $P \vee C \equiv P$
   (b) $P \vee T \equiv T$
   (c) $P \wedge C \equiv C$
   (d) $P \wedge T \equiv P$
7. (a) $P \vee \neg P \equiv T$
   (b) $P \wedge \neg P \equiv C$
8. Leyes de De Morgan
   (a) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
   (b) $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
9. Contrapositiva
   $P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$
10. Implicación
    $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$
11. Negación del condicional
    $\neg(P \to Q) \equiv P \wedge \neg Q$
12. (a) $P \vee Q \equiv \neg P \to Q$
    (b) $P \wedge Q \equiv \neg(P \to \neg Q)$
13. (a) $(P \to R) \wedge (Q \to R) \equiv (P \vee Q) \to R$
    (b) $(P \to Q) \wedge (P \to R) \equiv P \to (Q \wedge R)$
14. Equivalencia
    $P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
15. Ley de exportación
    $(P \wedge Q) \to R \equiv P \to (Q \to R)$
16. Reducción al absurdo
    $P \to Q \equiv (P \wedge \neg Q) \to C$

Nota: Observe que todas las equivalencias se han escrito con letras mayúsculas, este es un detalle importantísimo que está diciendo que en todos los casos lo que interesa es la forma de la proposición y no el contenido.

La regla (1) se refiere a la doble negación, dice que negar dos veces una proposición es equivalente a afirmarla y viceversa, independientemente de la proposición.

Ejemplo 1.19.

1. $\neg\neg r \equiv r$
2. $N \equiv \neg\neg N$
3. $\neg\neg(p \wedge q) \equiv p \wedge q$
4. $\neg\neg(\neg s) \equiv \neg s$
5. $p \to q \equiv \neg\neg(p \to q)$
6. $a \vee b \equiv \neg\neg(a \vee b)$ □

[1] C y T denotan contradicción y tautología respectivamente.

La regla (2) afirma que la conjunción, la disjunción y el bicondicional son conmutativas, de manera que tal regla es aplicable a cualquier proposición que tenga una de estas tres formas, sin importar quién sea P o Q, basta con que sean proposiciones.

Ejemplo 1.20.

1. $r \vee t \equiv t \vee r$ (regla 2a)
2. $\ell \leftrightarrow b \equiv b \leftrightarrow \ell$ (regla 2c)
3. $(p \vee q) \wedge m \equiv m \wedge (p \vee q)$ (regla 2b)
4. $(a \vee b) \leftrightarrow p \equiv p \leftrightarrow (a \vee b)$ (regla 2c)
5. $a \vee (b \rightarrow c) \equiv (b \rightarrow c) \vee a$ (regla 2a) □

La regla (8) se utiliza con frecuencia. Afirma que la negación de una disjunción es equivalente a la conjunción de dos negaciones y la negación de una conjunción es equivalente a la disjunción de dos negaciones.

Ejemplo 1.21.

1. Afirmar: "Es falso que, Manuel no es médico y habla francés" es equivalente a decir "Manuel es médico o no habla francés".
2. Afirmar: "Emilia está enferma y faltó a clases hoy" es equivalente a decir "Es falso que, Emilia no está enferma o vino a clases hoy"
3. Combinando reglas anteriores es posible afirmar:

$$\neg(p \wedge q) \vee r \equiv r \vee \neg(p \wedge q) \equiv r \vee (\neg p \vee \neg q) \equiv (r \vee \neg p) \vee \neg q \equiv \neg(\neg r \wedge p) \vee \neg q, \text{etc.}$$

□

La proposición (10 a) permite la transformación de un condicional en una disjunción y viceversa. Debe notarse aquí que los elementos del condicional son P y Q, mientras que los de la disjunción son la negación del antecedente con el consecuente en su forma original, donde P o Q no necesariamente son proposiciones simples.

Ejemplo 1.22.

1. $a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b$
2. $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv \neg p \vee (q \wedge r)$
3. $a \rightarrow \neg b \equiv \neg a \vee \neg b$
4. $p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$ □

Ejercicios 1.3

En los ejercicios 1 a 11 aparece una proposición, aplique la regla que se indica para obtener una equivalencia.

1. $p \rightarrow (q \wedge r)$ (10)
2. $(p \wedge q) \rightarrow r$ (10)
3. $(p \wedge q) \vee \neg r$ (4)
4. $(\neg p \vee q) \wedge r$ (4)
5. $(m \vee t) \wedge (h \wedge q)$ (4)
6. $(m \vee t) \wedge (h \vee q)$ (4)
7. $\neg[(p \rightarrow q) \vee r]$ (8)
8. $\neg[(p \wedge q) \vee r]$ (8)
9. $\neg[h \rightarrow (p \vee r)]$ (11)
10. $\neg[(n \vee t) \rightarrow s]$ (11)
11. $\neg[(a \vee b) \wedge (r \vee c)]$ (8)

En los ejercicios 12 a 15 aparece una equivalencia, indique el número de regla que se aplicó.

12. $s \rightarrow (p \wedge q) \equiv \neg(p \wedge q) \rightarrow \neg s$
13. $\neg p \rightarrow r \equiv p \vee r$
14. $(p \vee q) \wedge a \equiv (p \wedge a) \vee (q \wedge a)$
15. $(\neg r \wedge q) \vee (\neg r \wedge p) \equiv \neg r \wedge (q \vee p)$
16. Explique por qué la siguiente expresión no es una equivalencia: $[p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q)]$. ¿Cuál es el error?

Demuestre la veracidad de las proposiciones 17 a 19. No use tablas de verdad.

17. $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
18. $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
19. $\neg[(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \vee \neg q)] \equiv p$

1.4. Implicaciones lógicas

Definición 1.5. Dadas dos proposiciones P y Q, se dice que P **implica lógicamente** Q sii cuando P es verdadero, entonces Q es verdadero. Simbólicamente se escribe P$\rightarrow$ Q si y sólo si la proposición P $\rightarrow$ Q es una tautología.

Ejemplo 1.23. La proposición $(p \wedge q) \rightarrow p$ es una implicación lógica porque:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

es una tautología. □

La tabla 2 que aparece adelante, presenta algunas implicaciones lógicas de gran utilidad en la demostración de otras implicaciones o de la validez de argumentos.

Es importante aclarar la diferencia entre una equivalencia y una implicación lógica. En una equivalencia lógica la proposición de la izquierda se puede transformar en la proposición de la derecha y viceversa. En una implicación lógica, únicamente la proposición de la izquierda se puede transformar en la proposición de la derecha pero no viceversa.

Lo anterior se puede ilustrar fácilmente tomando cualquier proposición de la tabla 2 y construyendo la tabla de verdad no para un $\rightarrow$ sino en $\leftrightarrow$ y se notará que no se obtiene una tautología.

Ejemplo 1.24. La proposición (18) afirma que si $p \wedge q$ es verdadero de seguro p también lo es, pero que si p es verdadero no se puede asegurar que $p \wedge q$ lo sea, de ahí que $p \rightarrow (p \wedge q)$ no resulta una tautología. □

Tabla 2. Implicaciones lógicas[2]

17. Adición
    $P \Rightarrow (P \vee Q)$
18. Simplificación
    $(P \wedge Q) \Rightarrow P$
19. Absurdo
    $(P \Rightarrow C) \Rightarrow \neg P$
20. Modus ponens
    $[P \wedge (P \rightarrow Q)] \Rightarrow Q$
21. Modus tollens
    $[(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q] \Rightarrow \neg P$
22. Silogismo disyuntivo
    $[(P \vee Q) \wedge \neg P] \Rightarrow Q$
23. $P \Rightarrow [Q \rightarrow (P \wedge Q)]$
24. Transitividad de $\leftrightarrow$
    $[(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \leftrightarrow R)$
25. Silogismo hipotético
    $[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \Rightarrow (P \rightarrow R)$
26. (a) $(P \rightarrow Q) \Rightarrow [(P \vee R) \rightarrow (Q \vee R)]$
    (b) $(P \rightarrow Q) \Rightarrow [(P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R)]$
    (c) $(P \rightarrow Q) \Rightarrow [(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \Rightarrow R)]$
27. Dilemas constructivos
    (a) $[(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)] \Rightarrow [(P \vee R) \rightarrow (Q \vee S)]$
    (b) $[(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)] \Rightarrow [(P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge S)]$
28. Dilemas destructivos
    (a) $[(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)] \Rightarrow [(\neg Q \vee \neg S) \rightarrow (\neg P \vee \neg R)]$
    (b) $[(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)] \Rightarrow [(\neg Q \wedge \neg S) \rightarrow (\neg P \wedge \neg R)]$

Al igual que en las equivalencias lógicas, para utilizar una implicación en la transformación de una proposición lo que interesa es la forma de tal proposición y no el contenido.

[2]El símbolo "$\Rightarrow$" indica implicación.

Ejemplo 1.25. La proposición (20) afirma que si se tiene un condicional, del cual se sabe que su antecedente es verdadero, se puede asegurar que el consecuente lo es también, sin importar el contenido de estos elementos:

$$[(r \vee m) \wedge [(r \vee m) \rightarrow h]] \Rightarrow h$$

Ejercicios 1.4

En los ejercicios 1 a 14 aparece una proposición, aplique la regla que se indica para obtener una implicación lógica.

1. $(m \vee t) \wedge s$ (18)
2. $(p \wedge r) \wedge q$ (18)
3. $(p \rightarrow q) \wedge q$ (18)
4. $r \wedge (\neg p \rightarrow h)$ (18)
5. $\neg(s \vee m) \wedge (p \rightarrow a)$ (18)
6. $[\neg t \wedge (\neg t \rightarrow a)]$ (20)
7. $[(m \rightarrow n) \wedge m]$ (20)
8. $[(a \vee b) \wedge [(a \vee b) \rightarrow d]]$ (20)
9. $[r \wedge (r \rightarrow \neg q)]$ (20)
10. $[r \wedge (p \rightarrow \neg r)]$ (21)
11. $[(\neg s \rightarrow h) \wedge \neg h]$ (21)
12. $[[(m \vee h) \rightarrow (a \wedge b)] \wedge (\neg a \vee \neg b)]$ (21)
13. $[(r \vee \neg m) \wedge m]$ (22)
14. $[\neg p \wedge (\neg q \vee p)]$ (22)

En los ejercicios 15 a 20 aparece una implicación lógica, indique el número de regla que se aplicó.

15. $[(m \vee r) \wedge \neg r] \Rightarrow m$
16. $(p \vee q) \wedge a \Rightarrow a$
17. $[a \rightarrow (m \vee r)] \wedge [(m \vee r) \rightarrow p] \Rightarrow (a \rightarrow p)$
18. $(r \rightarrow \neg p) \wedge p \Rightarrow \neg r$
19. $(\neg a \rightarrow \neg b) \wedge \neg a \Rightarrow \neg b$
20. $p \rightarrow r \Rightarrow (p \rightarrow r) \vee q$

Explique por qué las expresiones 21 a 25 no son implicaciones lógicas. ¿Cuál es el error?

21. $[(p \rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$
22. $[(p \rightarrow q) \wedge \neg p] \Rightarrow \neg q$
23. $(p \rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q) \rightarrow r$
24. $[(p \wedge r) \rightarrow (q \rightarrow r)] \Rightarrow p \rightarrow q$
25. $[(p \wedge q) \rightarrow r] \Rightarrow p \rightarrow r$

Demuestre la veracidad de las proposiciones 26 a 28. No use tablas de verdad.

26. $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$
27. $[\neg a \rightarrow (\neg b \wedge c)] \wedge (c \rightarrow b) \Rightarrow a$
28. $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)$

1.5. Demostraciones formales

En este apartado tratamos el planteamiento de demostraciones sin hacer uso de las tablas de verdad, sino más bien utilizando las tablas 1 o 2 de equivalencias e implicaciones lógicas.

Reglas de sustitución

Anteriormente hicimos referencia a estas reglas, ahora las enunciaremos formalmente.

1. Si una proposición P es lógicamente equivalente a una proposición Q y a su vez P es lógicamente equivalente a R, entonces R es lógicamente equivalente a Q. Simbólicamente:

   $$\text{Si } P \equiv Q \wedge P \equiv R, \text{ entonces } R \equiv Q$$

   De igual forma:

   $$\text{Si } P \equiv Q \wedge Q \equiv S, \text{ entonces } P \equiv S$$

2. Si una proposición P implica lógicamente Q y P o Q son lógicamente equivalentes a una proposición R, entonces R implica lógicamente Q, o P implica lógicamente R. Simbólicamente:

   $$\text{Si } P \Rightarrow Q \wedge P \equiv R, \text{ entonces } R \Rightarrow Q$$
   $$\text{Si } P \Rightarrow Q \wedge Q \equiv R, \text{ entonces } P \Rightarrow R$$

El siguiente ejemplo ilustra cómo plantear una demostración haciendo uso de las tablas 1 o 2.

Ejemplo 1.26. Demostrar la siguiente equivalencia lógica

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$

Solución: La demostración se trata de partir de una de las dos proposiciones compuestas, transformarla una o más veces utilizando la tabla 1, hasta obtener la otra proposición de la equivalencia. Resulta más cómodo trabajar hacia abajo. En cada paso se anota el número de regla que se utilizó para realizar la transformación.

$$\begin{aligned} \neg(p \to q) &\equiv \quad (10) \\ \neg(\neg p \vee q) &\equiv \quad (8a) \\ \neg\neg p \wedge \neg q &\equiv \quad (1) \\ p \wedge \neg q & \end{aligned}$$

□

¿Qué regla o reglas utilizar?, ¿cuántos pasos realizar? No hay una receta, aquí entran en juego varios factores: el conocimiento de las reglas, la mucha práctica y por consiguiente la creatividad mental.

Definición 1.6. Un **argumento** es un condicional, cuyo antecedente es la conjunción de dos o más proposiciones y el consecuente es la conclusión que se supone se deriva de dichas proposiciones. Simbólicamente: si $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ y q son proposiciones, entonces una expresión de la forma

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \to q$$

se llama argumento.

Se trata ahora de probar la validez o no de un argumento.

Aunque en teoría las tablas de verdad son apropiadas para probar la validez o no de un argumento, en la práctica resulta algo complicado de manejar, a medida que aumenta el número de proposiciones. Un método más eficiente es la deducción, un razonamiento deductivo es aquel que permite extraer la conclusión apartir de sus premisas, mediante la utilización sucesiva de equivalencias o implicaciones lógicas.

Ejemplo 1.27. Demostrar la validez del siguiente argumento.

Si aumenta la temperatura, se deshacen los glaciares. Si quemamos los desechos, entonces se reduce la capa de ozono. Si se reduce la capa de ozono, se filtran más rayos ultravioletas. Quemamos los desechos o reciclamos. Si se filtran más rayos ultravioletas, aumenta la temperatura. No se deshacen los glaciares. Por lo tanto, reciclamos.

Solución: Traducimos cada proposición a lenguaje lógico. Sean

a : aumenta la temperatura.

d : se deshacen los glaciares.

q : quemamos los desechos

o : se reduce la capa de ozono

f : se filtran más rayos ultravioletas

r : reciclamos

entonces el argumento es:

$$\begin{array}{lcl} (1) & a \rightarrow d & \textit{premisa} \\ (2) & q \rightarrow o & \textit{premisa} \\ (3) & o \rightarrow f & \textit{premisa} \\ (4) & q \vee r & \textit{premisa} \\ (5) & f \rightarrow a & \textit{premisa} \\ (6) & \neg d & \textit{premisa} \\ & \therefore r & \end{array}$$

Cada proposición anterior a la conclusión se llama premisa. Resulta más cómodo colocar una premisa por renglón. El símbolo $\therefore$ se lee "por lo tanto" e indica que sigue la conclusión.

Recuerde que las premisas están conectadas con $\wedge$ y como se trata de un condicional se quiere probar que la veracidad de las premisas llevan a la veracidad de la conclusión, por lo tanto el condicional es verdadero.

Demostración:

$$\begin{array}{lcl} (1) & a \rightarrow d & \textit{premisa} \\ (2) & q \rightarrow o & \textit{premisa} \\ (3) & o \rightarrow f & \textit{premisa} \\ (4) & q \vee r & \textit{premisa} \\ (5) & f \rightarrow a & \textit{premisa} \\ (6) & \neg d & \textit{premisa} \\ (7) & q \rightarrow f & (2) \wedge (3) : 25 \\ (8) & q \rightarrow a & (7) \wedge (5) : 25 \\ (9) & \neg a & (6) \wedge (1) : 21 \\ (10) & \neg q & (9) \wedge (8) : 21 \\ (11) & r & (10) \wedge (4) : 22 \end{array}$$

□

El número después de : indica el número de regla que se utilizó y el número o números anteriores indican las premisas conectadas. La última proposición es la conclusión del argumento.

Nótese que se ha obtenido la conclusión utilizando *todas* las premisas y que no se ha requerido de otra proposición no incluida en el argumento, es decir las premisas deben ser necesarias y suficientes para obtener la conclusión.

La demostración anterior se llama **demostración directa**, existe otro tipo de demostración formal que se llama **demostración por contradición**. Este método se basa en probar que la negación del argumento es falsa, por lo tanto el argumento es verdadero.

Ahora bien, negar un argumento significa negar un condicional. En páginas anteriores se probó que $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$, de manera que

$$\neg[(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q] \equiv p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \neg q,$$

se trata entonces de agregar como una premisa más la negación de la conclusión y probar que la nueva expresión siempre conduce a una contradicción.

Ejemplo 1.28. Demostrar por contradicción la validez del siguiente argumento: "Si Mario o Luisa ganan, entonces pierden Ramiro y Pedro. Mario gana. Por lo tanto Ramiro pierde."

Solución: Traducimos a lenguaje lógico:

Sea

m : Mario gana

ℓ : Luisa gana

r : Ramiro pierde

p : Pedro pierde

de manera que el argumento se expresa:

(1)	$(m \vee l) \to (r \wedge p)$	premisa
(2)	m	premisa
$\therefore$	r	conclusión

Demostración: La conclusión es r, debe agregarse su negación como una premisa más[3]:

(1)	$(m \vee l) \to (r \wedge p)$	*premisa*
(2)	m	*premisa*
(3)	$\neg r$	*premisa*
(4)	$[(m \vee l) \to r] \wedge [(m \vee l) \to p]$	$(1) : 13b$
(5)	$(m \vee l) \to r$	$(4) : 18$
(6)	$\neg(m \vee l)$	$(5) \wedge (3) : 21$
(7)	$\neg m \wedge \neg l$	$(6) : 8a$
(8)	$\neg m$	$(7) : 18$
(9)	$(\to\leftarrow)$	$(8) \wedge (2) : 7b$

□

La validez del argumento anterior se puede demostrar también de forma directa, inténtelo. Ahora bien, no se trata de que la validez de todo argumento se pueda demostrar de ambas formas, sino más bien de lograr la demostración más ágil y elegante.

[3]El símbolo "$\to\leftarrow$" indica contradicción.

Ejercicios 1.5

Traduzca cada uno de los siguientes argumentos en notación lógica y proporcione una demostración formal. Las letras entre paréntesis en cada caso denotan, respectivamente, las proposiciones simples que aparecen en el enunciado.

1. Si hay inflación hay huelgas. Si hay desempleo también hay huelgas. Hay inflación o hay desempleo. Por lo tanto, hay huelgas (i,h,d).

2. Si estudio, saco buenas notas. Si no estudio, me divierto. Si saco buenas notas, voy de excursión en verano. Si me divierto, gasto más dinero. Estudio o no estudio. Por lo tanto, voy de excursión en verano o gasto más dinero. (e,n,d,v,g).

3. Si paso el curso, iré de viaje. Estudio o trabajo. Si no paso el curso entonces no estudio. No trabajo. Por lo tanto, iré de viaje. (p,v,e,t).

4. Si no voy en taxi y me baño llego tarde. Si no tengo dinero entonces no voy en taxi. No trabajo y no tengo dinero. Llego temprano. Por lo tanto, no me baño. (v,b,t,d,w).

5. Si estudio computación, entonces ganaré mucho dinero. Si estudio arqueología, entonces viajaré mucho. Si gano mucho dinero o viajo mucho, no me aburro. Por lo tanto, si estoy aburrido, no estudié computacíon ni estudié arqueología. (c,d,a,v,b).

6. Si obtengo el puesto y trabajo duro, entonces me ascenderán. Si me ascienden seré feliz. No seré feliz. Por lo tanto, o no obtendré el puesto o no trabajaré duro. (p,t,a,f).

7. Si estudio, no perderé matemáticas. Si no juego futbol, entonces estudio. Perderé matemáticas. Por lo tanto, jugué futbol. (e,m,j)

8. Si K es entero, entonces K es primo. Si K es par, entonces es compuesto. Si K es primo o es compuesto, entonces es mayor que 3. Por lo tanto, si K no es mayor que 3, no es entero ni es par. (e,r,p,c,m).

9. Si pago la U y compro los libros, entonces me quedaré sin dinero. Si no compro los libros no podré estudiar. Por lo tanto si no me he quedado sin dinero y podré estudiar entonces no pagué la U. (p,c,d,e)

10. Si trabajo, no podré estudiar. Trabajo o apruebo matemáticas. No aprobé matemáticas. Por lo tanto, no estudié. (t,e,m)

11. Si Juan es poeta, entonces no tiene dinero. Juan no es feliz o tiene dinero. Juan es feliz. Por lo tanto, no es poeta. (p,d,f)

12. Si salgo temprano, entonces iré al cine o iré a nadar. Iré a nadar si y sólo si no hace frío. Por lo tanto, si no voy al cine, no salí temprano o no hace frío. (t,c,n,f)

13. Mónica dice la verdad o la prensa exagera. Clinton dice la verdad o cometió un error. Si Mónica dice la verdad, entonces Clinton no dice la verdad. La prensa no exagera. Por lo tanto, Clinton cometió un error. (v,p,c,e)

14. Hace calor o si está lloviendo, entonces hace frío. Está lloviendo o hace frío. Si hace frío, entonces hace calor. Por lo tanto hace calor. (contradicción), (c,i,f).

15. Si me levanto temprano y si me baño, entonces voy a trabajar. Si voy a trabajar, entonces ganaré mucho dinero. Me levanto temprano. Por lo tanto, si no gano mucho dinero, entonces no me baño. (t,b,w,d).

16. Si no hago la tarea, entonces no repasaré la materia. Si ordeno mi cuaderno, entonces estaré al día. Si no repaso la materia o si estoy al día, entonces me acostaré tarde. De ahí que, si no me acuesto tarde, entonces hice la tarea y no ordené mi cuaderno. (t,m,o,e,a)

1.6. Cuantificadores

Tratamos ahora un tipo especial de proposiciones que denominamos proposiciones cuantificadas.

Ejemplo 1.29.

(a) Para todo número real mayor que 2, su cuadrado es mayor que 4.

(b) Todos los músicos son personas sensibles.

(c) Algunos ingenieros son poetas.

(d) Existe al menos un tríangulo isósceles que es equilátero.

(e) Ningún número racional es entero. □

Varias características presentan proposiciones de la forma anterior:

1. Se refieren a un número infinito de proposiciones o a un número muy grande de ellas.

2. Utilizan expresiones como: todos, para todos, algunos, existe alguno.

3. Relacionan elementos de un grupo con elementos de otro.

Para expresar simbólicamente proposiciones como estas, es necesario introducir dos nuevos símbolos:

- El símbolo $\forall$ que se lee "para todo", "para cada" o "para cualquiera" se le llama **cuantificador universal**, porque se refiere a todos los miembros de cierta clase.
- El símbolo $\exists$ que se lee "existe al menos uno", "para algunos", se le llama **cuantificador existencial**, porque afirma la existencia de un elemento en particular. Es necesario además, una nueva notación que nos permita hacer referencia al conjunto a que pertenece determinado elemento. Así por ejemplo, si p denota el enunciado "ser feliz", entonces la expresión $p(x)$ significará "x es feliz". La expresión $p(x)$ se llama **predicado**, el mayor conjunto al que pertenece x se llama **universo** y x es el **sujeto** de la proposición.

Ejemplo 1.30. Las proposiciones del ejemplo 1.29 se expresan simbólicamente así:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}\ [x > 2 \rightarrow x > 4]$

(b) $\forall x\ [m(x) \rightarrow s(x)];\ m(x) : x$ es músico, $s(x) : x$ es sensible

(c) $\exists x : i(x) \rightarrow p(x); i(x) : x$ es ingeniero, $p(x) : x$ es poeta

(d) $\exists x\ /\ t(x) \rightarrow e(x); t(x) : x$ es un triángulo isosceles, $e(x) : x$ es un triángulo equilátero

(e) $\forall x\ [x \in \mathbb{Q} \rightarrow x \notin \mathbb{Z}]$ □

El símbolo ":" o "/" se lee "tal que". En el caso del cuantificador universal se acostumbra encerrar entre paréntesis cuadrados la proposición a la que hace referencia. En la práctica se agregan o quitan paréntesis para tener más claridad.

VALORES DE VERDAD DE UNA PROPOSICIÓN CUANTIFICADA

- La proposición compuesta $\forall x[p(x)]$ tiene los siguientes valores de verdad:

  Verdadero si $p(x)$ es verdadera para toda x en el universo.

  Falso si existe al menos una x tal que $p(x)$ es falso.

La falsedad de una proposición con el cuantificador universal, puede ser demostrada con un ejemplo que no satisface el predicado; tal ejemplo se llama contraejemplo.

Ejemplo 1.31. En la proposición $\forall x \in \mathbb{R}\ [x^2 \geq 1]$, $x = \frac{1}{2}$ es un contraejemplo pues $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ y es falso que $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq 1$. □

Note además, que la vía de los ejemplos no es un buen camino para demostrar la veracidad de las proposiciones de esta forma, ello funciona únicamente en casos en los que el universo contenga un número muy pequeño de elementos.

Ejemplo 1.32. Demostrar la veracidad de la proposición $\forall x \in \mathbb{N}\ [x^2 \geq 0]$ utilizando ejemplos que hacen verdadero el predicado, $x^2 \geq 0$, es imposible; así también no es suficiente el que algunos o muchos lo cumplan, para garantizar que todos lo hacen. □

- La proposición compuesta $\exists x / p(x)$ tiene los siguientes valores de verdad:

  Verdadero si $p(x)$ es verdadera para al menos un x en el universo.

  Falso si $p(x)$ es falsa para toda x en el universo.

Ejemplo 1.33. Sea $\mathbb{N}$ el universo y sea $p(x) : x^2 - 1 = 0$. La proposición $\forall x[p(x)]$ es falsa, porque afirma que el cuadrado de todo natural menos uno es igual a cero. Sin embargo es posible hallar números naturales que no satisfacen la igualdad, por ejemplo $p(3)$ es falsa, porque $3^2 - 1 \neq 0$. Por otra parte la proposición $\exists x : p(x)$ es verdadera, porque existe al menos un número natural, el 1, tal que $p(x)$ es verdadera. □

Debe notarse que en una proposición de la forma $p(x)$, el valor de verdad puede variar al variar el sujeto, mientras que una vez que la variable se cuantifica y se especifica el universo, el valor de verdad no varía con x. La variable x en $\forall x[p(x)]$ o $\exists x : p(x)$ se llama **variable acotada**; está acotada por el cuantificador. La variable x en $p(x)$ se llama **variable libre**.

Es posible también considerar predicados que están en función de más de una variable e incluso de más de un universo, en tales casos el uso de varios cuantificadores resulta natural. Así por ejemplo, sea $\mathcal{U}$ el universo, x, y variables y $p(x,y)$ un predicado de dos variables; existen ocho maneras de aplicar los dos cuantificadores a las dos variables: $\forall x \forall y$, $\forall y \forall x$, $\exists x \exists y$, $\exists y \exists x$, $\forall x \exists y$, $\exists y \forall x$, $\forall y \exists x$, $\exists x \forall y$. Las dos primeras son lógicamente equivalentes puesto que tienen el mismo significado, de manera similar $\exists x \exists y : p(x,y)$ y $\exists y \exists x : p(x,y)$ son lógicamente equivalentes, las cuatro restantes no necesariamente.

- $\forall x \forall y[p(x,y)]$: para cualesquiera dos $p(x,y)$.
- $\exists x \exists y / p(x,y)$: existen al menos dos tales que $p(x,y)$.

- $\forall x \exists y / p(x,y)$: para cada x existe al menos un y tal que $p(x,y)$.
- $\exists x \forall y [p(x,y)]$: existe al menos un x para todo y $p(x,y)$.

Ejemplo 1.34. Sea $\mathbb{R}$ el universo y sea $p(x,y) : x + y = 0$, entonces:

i) $\forall x \forall y [p(x,y)]$ es falso, porque es posible hallar al menos una pareja de números reales, tales que su suma es diferente de cero; por ejemplo $p(1,4)$ es falso, $1 + 4 \neq 0$.

ii) $\exists x \exists y : p(x,y)$ es verdadero porque existe al menos una pareja de números reales cuya suma es cero, por ejemplo $1 + -1 = 0$.

iii) $\forall x \exists y : p(x,y)$ esta proposición afirma que para cada número real es posible hallar al menos un real tal que su suma es cero, lo cual es verdadero porque todo número real posee inverso aditivo. Si a es cualquier real, existe su opuesto $-a$ tal que $a + -a = 0$.

iv) $\exists y \forall x [p(x,y)]$ esta proposición afirma que existe al menos un número real tal que sumado con cualquier real el resultado es cero, lo cual es falso. Note que $\exists y \forall x$ afirma que es un mismo y para todo los x aunque tal y no tiene que ser único.

v) $\forall y \exists x : p(x,y)$ en este caso particular, la proposición hace la misma afirmación que $\forall x \exists y : p(x,y)$. Debe notarse que a cada x le corresponde un y, pero que no afirma que tal y debe ser distinto para cada x.

vi) $\exists x \forall y : p(x,y)$ es falsa por la misma razón dada en (iv). □

1.6.1. Negación de Cuantificadores

Se generalizan ahora las leyes de DeMorgan para proposiciones con cuantificadores, estas son:

1. $\neg \forall x [p(x)] \equiv \exists x / \neg p(x)$
2. $\neg \exists x : p(x) \equiv \forall x [\neg p(x)]$
3. $\forall x [p(x)] \equiv \neg \exists x / \neg p(x)$
4. $\exists x : p(x) \equiv \neg \forall x [\neg p(x)]$

La equivalencia (1) afirma que "no todos los elementos del universo cumplen p(x)" es decir que "existe al menos uno que no lo cumple". Afirmar que "no existe al menos un elemento del universo que cumple $p(x)$" es equivalente a

decir que "todos los elementos del universo no cumplen $p(x)$". Decir que "todos los elementos del universo cumplen $p(x)$" es equivalente a afirmar que "no existe al menos uno que no cumpla $p(x)$".

Estas leyes pueden utilizarse repetidamente para negar cualquier proposición cuantificada.

Ejemplo 1.35. (a) Negar: $\forall x \exists y / p(x,y)$

$$\begin{aligned} \neg \forall x \exists y / p(x,y) &\equiv \exists x / \neg \exists y : p(x,y) \\ &\equiv \exists x \forall y [\neg p(x,y)] \end{aligned}$$

(b) Negar: $\forall x \forall y \exists z [x < z < y]$

$$\begin{aligned} \neg \forall x \forall y \exists z [x < z < y] &\equiv \exists x \exists y \forall z \neg [x < z < y] \\ &\equiv \exists x \exists y \forall z [(x \geq z) \vee (z \geq y)] \end{aligned}$$ □

Una proposición "especial" que casi es una tautología es la siguiente:

$$\forall x [p(x)] \rightarrow \exists x : p(x).$$

Ejemplo 1.36.

a) "Si todo cuadrado es rectángulo, entonces existe al menos un cuadrado que es rectángulo". El universo es el conjunto de todos los rectángulos.

b) "Si todo niño es travieso, entonces existe al menos un niño que es travieso". El universo es el conjunto de todos los niños.

c) "Si todos los elefantes que vuelan son blancos, entonces existe al menos un elefante que vuela y es blanco. El universo es el conjunto de todos los elefantes que vuelan ". □

En el ejemplo c) la proposición es falsa, porque el antecedente es verdadero y el consecuente falso. Lo anterior ocurre porque el universo es el conjunto vacío. Si usted cree que este caso $\forall x [p(x)]$ es falso, enuncie entonces un contraejemplo, es decir muestre un elefante que vuele y no sea blanco. Recuerde que la vía del contraejemplo es la única forma de demostrar la falsedad de $\forall x [p(x)]$.

De manera que la proposición $\forall x [p(x)] \rightarrow \exists x : p(x)$ *es una tautología, para todo universo no vacío.*

Ejercicios 1.6

En los ejercicios 1 a 9 escriba lógicamente las proposiciones, utilizando los siguientes predicados:

$h(x)$: x es un ser humano
$m(x)$: x teme a la muerte
$i(x)$: x es un ser imaginario
$o(x)$: x es un mentiroso
$p(x)$: x es ignorado
$q(x)$: x es millonario
$f(x)$: x es feliz
$u(x)$: x es un unicornio
$U = \{x \ / \ x \text{ es un ser}\}$

1. Cualquier humano teme a la muerte.
2. Los unicornios son seres imaginarios.
3. Algunos no son millonarios y son felices.
4. Los unicornios existen pero son ignorados.
5. Todo mentiroso es infeliz.
6. Alguien no es feliz.
7. Alguien no es mentiroso.
8. Nadie es pobre y feliz.
9. Los seres imaginarios no temen a la muerte.

Escriba las expresiones 10 a 12 en notación lógica. Use cuantificadores, especifique los universos, utilice $\mathbb{R}$ *si no se especifica ningún universo.*

10. Si $x < y$ y $y < z$, entonces $x < z$.
11. Para todo número x mayor que cero, existe uno natural n tal que $n > x$ y $x > \frac{1}{n}$
12. Para todo m, n naturales, existe p natural tal que $m < p$ y $p < n$.

Determine el valor de verdad de las proposiciones 13 a 25. De 13 a 20 el universo es $\mathbb{R}$. *De 21 a 23 el universo es* $\mathbb{N}$.

13. $\forall x \exists y / xy = 1$
14. $\exists y \forall x [xy = 1]$
15. $\exists x \exists y / xy = 1$
16. $\forall x \forall y [(x+y)^2 = x^2 + y^2]$
17. $\forall x \exists y / (x+y)^2 = x^2 + y^2$
18. $\exists y \forall x [(x+y)^2 = x^2 + y^2]$

19. $\exists x \exists y / 2x - y = 3 \wedge 5x + 3y = -1$
20. $\forall m \exists n / 2n = m$
21. $\forall m \exists n / m > n$
22. $\exists n \forall m [m > n]$
23. $\exists n \exists m / m = 2n$
24. $\exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} [n - m = n]$
25. $\forall x, y \in \mathbb{R} [\sqrt{x^2 + y^2} = x + y]$

Proporcione un contraejemplo para cada una de las proposiciones 26 a 32.

26. Toda ecuación en $\mathbb{R}$ que tenga exactamente dos soluciones distintas en $\mathbb{R}$ es una ecuación cuadrática.
27. $\forall m, n \in \mathbb{N} \exists x \in \mathbb{N}$ tq $m < x < n$.
28. $\forall x \forall y [x - y = y - x]; x, y \in \mathbb{R}$.
29. $\forall x \exists y / xy = 1; x, y \in \mathbb{R}$.
30. $\forall n \in \mathbb{N} [n^3 < 3]$.
31. $\forall x \in \mathbb{R} [(x + 1)^2 \geq x^2]$.
32. $\forall n \geq 2 [2^n - 1$ es primo $]$

En los ejercicios 33 a 51 escriba la negación de cada proposición.

33. $[\forall x (c(x) \wedge r(x))] \rightarrow [\forall y (p(y) \rightarrow q(y))]$
34. $\forall x [a(x) \rightarrow \forall y h(y)]$
35. $\forall x, y [r(x, y) \rightarrow r(y, x)]$
36. $\forall x, y [r(x, y) \rightarrow \neg r(y, x)]$
37. $\forall x, y \forall z \{[r(x, y) \wedge r(y, z)] \rightarrow r(x, z)\}$
38. $\exists x / [(p(x) \wedge a(x)) \wedge 8y (p(x) \wedge a(y))] \rightarrow x = y$
39. $\forall x [(r(x) \vee q(x)) \rightarrow (e(x) \wedge d(x))]$
40. $\forall x \exists y / p(x) \wedge m(y)$
41. $\forall x, y [n(x) \rightarrow (m(y) \vee p(y))]$
42. $\forall x \in M [r(x) \vee p(x)] \rightarrow \exists y \in A / \neg p(y) \vee r(y)$
43. $\exists m, n \in A / q(n) \wedge [r(m, n) \leftrightarrow \neg q(m)]$
44. $\forall x \in A [f(x)] \vee \exists m \in P / \neg g(m) \rightarrow h(x)$
45. $\forall x, y [f(x) = f(y) \rightarrow x = y]$.

46. $\forall x, y[x < y \rightarrow f(x) < f(y)]$
47. $\forall p$ primo $[p/a \cdot b \rightarrow p/a \wedge p/b]$
48. $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{Z} / x > y \rightarrow (x^2 > y^2 \vee x + y = 0)$
49. Cualquier entero no positivo su cubo es menor que su sucesor.
50. $\exists a, b \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{N}[a < x < b]$
51. Cualquier día soleado hace calor y no anochece temprano.

En los ejercicios 52 a 73 exprese en lenguaje matemático cada afirmación.

52. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a ellos también son congruentes.
53. La intersección de dos conjuntos es un subconjunto de cualquiera de los conjuntos dados.
54. Dados dos números reales cualesquiera se cumple que: son iguales ó uno de ellos es mayor que el otro.
55. Para cada número real existe un real tal que es su inverso aditivo.
56. Si el producto cartesiano de dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ es conmutativo, entonces al menos uno de los conjuntos es vacío.
57. Para cualquier número real existe un único número real tal que si su diferencia es menor que 3, entonces el doble de su suma es mayor que 5.
58. La adición en el conjunto de los números reales es cerrada y conmutativa.
59. Algunos subconjuntos del conjunto de los números reales son subconjuntos del conjunto de los números racionales.
60. La suma de dos enteros cualesquiera es un número par mayor que 5.
61. Si la cardinalidad de la unión de dos conjuntos es igual a la suma de las cardinalidades, entonces uno de los conjuntos es subconjunto del otro.
62. Existe al menos un humano que es primo de todos los humanos.
63. Para cualquier número real distinto de cero existe un único número real que es su inverso multiplicativo.
64. Dos rectas son paralelas sii sus pendientes son iguales.
65. Todo conjunto es subconjunto de sí mismo.
66. Todo número entero es par o impar.

67. La suma de dos enteros cualesquiera es un número par.
68. Si el producto cartesiano de dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ es conmutativo, entonces al menos uno de los conjuntos es vacío.
69. La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°.
70. Para algunos números primos mayores que 5 su cuadrado es menor que 100.
71. El conjunto de los números reales es un conjunto ordenado.
72. Para cualquier número real existe un número real tal que si su diferencia es menor que 3, entonces el doble de su suma es mayor que 5.
73. Algunos subconjuntos del conjunto de los números reales son discretos.
74. Demuestre: $\exists x, y \in \mathbb{R} / 3x - 5y = 4 \wedge 2x + y = -6$
75. Demuestre la falsedad de $\forall a \in \mathbb{R}[11a - 8 \leq 6 \rightarrow 3a + 6 > 0]$

Acerca de los autores

Floria Arias Tencio

Licenciada en enseñanza de las matemáticas y Magíster en Planificación Curricular por la Universidad de Costa Rica. Labora como profesora en la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica desde hace más de veinte años. Ha sido profesora de la Escuela de Formación Docente de la Universidad de Costa Rica en cursos de licenciatura en Enseñanza de la Matemática. Profesora en educación secundaria. Actualmente dirige proyectos de investigación en el campo de la Educación Matemática y trabaja en la formación de profesores de matemática para la educación secundaria.

Hugo Barrantes Campos

Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Costa Rica y Máster en Tecnología e Informática Educativa por la Universidad Nacional. Labora como profesor en la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica y en la Universidad Estatal a Distancia desde hace más de treinta años. Ha sido coordinador de diversos cursos de matemática en ambas universidades. En la Universidad de Costa Rica ha sido subdirector del Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas por varios años. Ha publicado varios libros de texto en diferentes temas de matemáticas como cálculo, álgebra lineal, ecuaciones diferenciales entre otros. También tiene varias publicaciones relacionadas con investigación en el campo de la Educación Matemática.

Esta es una
muestra del libro
en la que se despliega
un número limitado de páginas.

Adquiera el libro completo en la
Librería UCR Virtual.

LIBRERÍA
UCR
VIRTUAL

Este texto desarrolla las temáticas del curso MA-123: Introducción a la Matemática dirigido a estudiantes de II ciclo de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica.

El objetivo central es estudiar desde una perspectiva introductoria a la formalización matemática, el tema funciones reales de variable real, a partir de los contenidos planteados en los programas de Matemática de Educación Secundaria. El libro inicia con el estudio de las nociones básicas de lógica proposicional, pues son estas la plataforma de la matemática formal. Se continúa con el planteamiento de demostraciones sencillas sin contenido matemático aún, que pretenden favorecer el desarrollo del pensamiento deductivo. Como segundo y tercer capítulo, se estudian únicamente las nociones fundamentales de teoría de conjuntos y relaciones binarias, necesarias para el estudio de las funciones reales.

El capítulo cuarto desarrolla los conceptos fundamentales y las propiedades en general de las funciones en IR y se plantea con mayor detalle y rigurosidad la demostración de algunas de estas propiedades. En los capítulos cinco y seis se tratan tres casos particulares de funciones: exponencial, logarítmica y trigonométrica; procurando la extensión y aplicación de las principales nociones generales estudiadas en el capítulo cuatro.