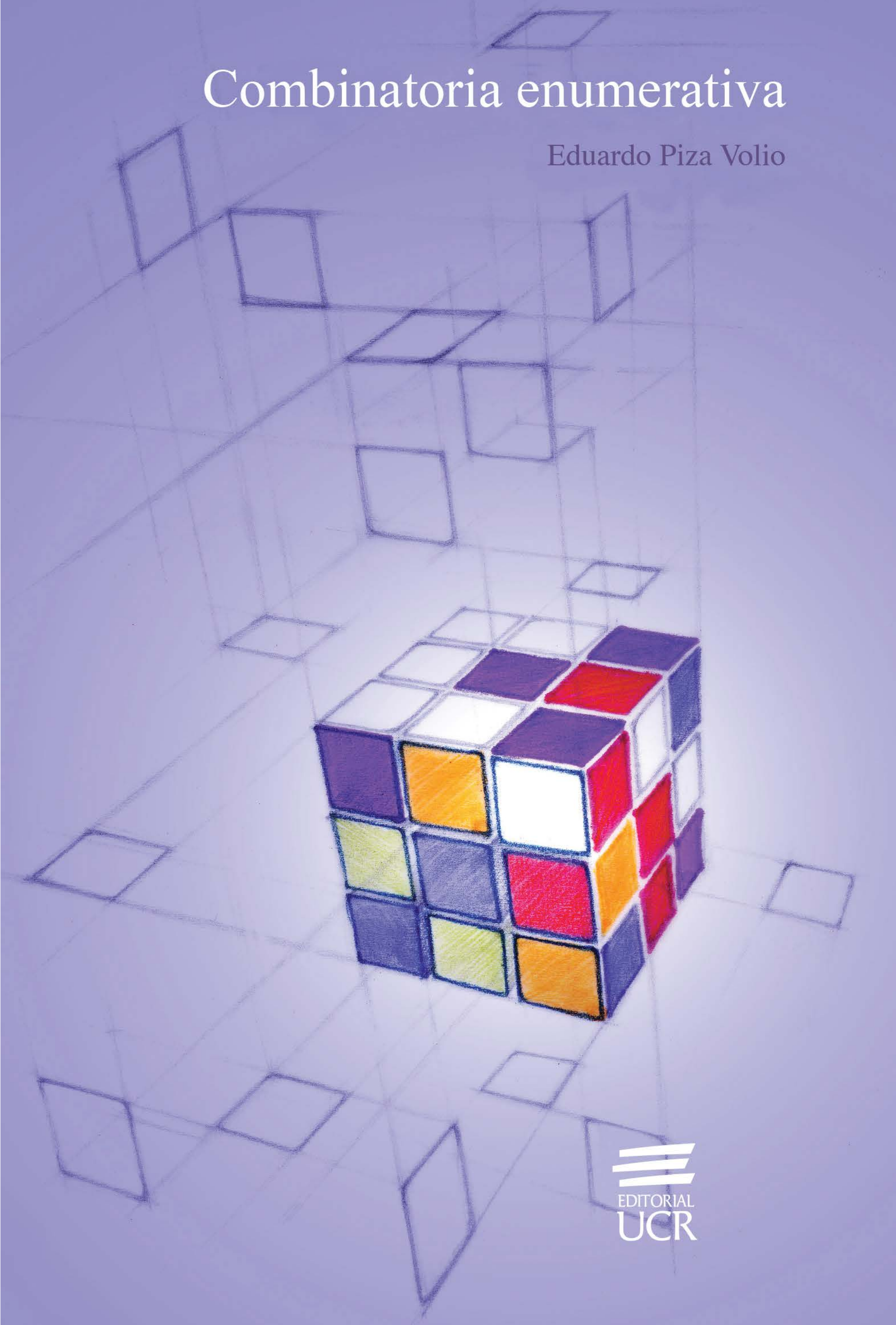
Combinatoria enumerativa

Eduardo Piza Volio



EDITORIAL
UCR

Combinatoria enumerativa

Eduardo Piza Volio

EDITORIAL
UCR

511.6
P695c Piza Volio, Eduardo, 1956-
Combinatoria enumerativa / Eduardo Piza Volio. – Primera edición digital. – San José, Costa Rica : Editorial UCR, 2021.
1 recurso en línea (xii, 167 páginas) : ilustraciones en blanco y negro, archivo de texto, PDF, 2.01 MB.

ISBN 978-9968-02-005-3

1.ANÁLISIS COMBINATORIO. I. Título.

CIP/3715
CC.SIBDI.UCR

Las opciones de resaltado del texto, anotaciones o comentarios dependerán de la aplicación y dispositivo en que se realice la lectura de este libro digital.

Edición aprobada por la Comisión Editorial de la Universidad de Costa Rica
Primera edición impresa: 2003.
Primera reimpresión: 2016
Primera edición digital (PDF): 2021.

Editorial UCR es miembro del Sistema Editorial Universitario Centroamericano (SEDUCA), perteneciente al Consejo Superior Universitario Centroamericano (CSUCA).

Ilustración de portada: Elisa Giacomin V. • Realización del PDF: *Alonso Prendas V.* • Control de calidad de la versión digital: *Hazel Aguilar B.*

Edición digital de la Editorial Universidad de Costa Rica. Fecha de creación: agosto, 2021
Universidad de Costa Rica. Ciudad Universitaria Rodrigo Facio. San José, Costa Rica.

Apdo. 11501-2060 • Tel.: 2511 5310 • Fax: 2511 5257
administracion.siedin@ucr.ac.cr • www.editorial.ucr.ac.cr

Contenido

Capítulo 1

Permutaciones

1.1. Cardinalidad de conjuntos finitos

La cardinalidad de un conjunto finito X es el número de elementos del conjunto X y se denota como $\mathrm{Card}(X)$, o bien simplemente como $|X|$. Nuestro primer resultado es básico y fundamental.

Proposición 1 *Sea A y B dos conjuntos finitos de cardinalidades n y m respectivamente. Entonces,*

(a) *La unión de conjuntos, $A \cup B$, es finita y*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

(b) *El producto cartesiano de conjuntos, $A \times B$, es finito y*

$$|A \times B| = nm.$$

(c) *El conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$, formado por todos los subconjuntos de A, es finito, y $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^n$.*

Demostración: Para demostrar la propiedad (a) vamos a utilizar un simple argumento de conteo. El conjunto $A \cup B$ esta compuesto por los n elementos de A más los m elementos de B. Sin embargo, algunos de los elementos de B ya fueron contabilizados en A. Tal es el caso precisamente de los $|A \cap B|$ elementos de $A \cap B$, razón por la cual debemos restar esa cantidad para obtener finalmente $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Una prueba de la propiedad (b) es la siguiente: para cada elemento $a_0 \in A$, el conjunto $A \times B$ tiene exactamente $|B| = m$ elementos del tipo (a_0, b), con $b \in B$. De allí que en total $A \times B$ tenga

$$\underbrace{m + m + \cdots + m}_{|A| = n \text{ veces}} = nm$$

elementos. Finalmente, la propiedad (c) es una consecuencia directa de la fórmula del Binomio de Newton, estudiada en el capítulo 3, por lo que aplazaremos su demostración. ■

La fórmula $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ es en esencia el famoso principio de inclusión-exclusión, el cual estudiaremos en el capítulo 5.

1.2. Permutaciones de objetos distintos

Supóngase que tenemos n objetos diferentes o distinguibles unos de otros. Podemos "arreglarlos" o "disponerlos" en un renglón en un orden cualquiera. Cada uno de estos "arreglos" o "disposiciones" es una *permutación* de los objetos. En las permutaciones interesa no solamente los objetos mismos, *sino también el orden en que se arreglan estos objetos*.

Proposición 2 *El número de permutaciones de n objetos distinguibles, tomados todos a la vez, es igual a $n!$.*

Demostración: En efecto, en un arreglo cualquiera, el primer objeto puede ser seleccionado de n diferentes maneras. El segundo objeto puede seleccionarse de $n - 1$ diferentes maneras, luego de haberse seleccionado el primero objeto. El tercer objeto puede seleccionarse de $n - 2$ formas distintas, luego de haber sido seleccionados el primero y segundo objetos, etc. Luego, el número total de permutaciones será $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$. ■

Por ejemplo, existen $3! = 6$ permutaciones de las tres letras a, b, c, las cuales son:

$$\begin{matrix} abc & bac & cab \\ acb & bca & cba \end{matrix}$$

Si los objetos son vistos como letras, como en el ejemplo, entonces tendremos que n letras distintas al ser permutadas generan en total $n!$ "palabras" distintas.

Otra manera de interpretar este resultado: $n!$ es que el número de funciones *biyectivas* que se puede definir entre dos conjuntos X y A de igual cardinalidad ($|X| = |A| = n$).

En efecto, si $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, entonces una función $f\colon X \mapsto A$ puede ser descrita en forma completa enumerando el rango de ella: $f(1) = a_{i_1}$, $f(2) = a_{i_2}, \ldots,$ $f(n) = a_{i_n}$. Lo anterior puede simplificarse aún más escribiendo la "palabra" de n "letras" $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n}$, donde las "letras" son los elementos de A. La propiedad de biyectividad de la función f se interpreta en el sentido que todas las n "letras" a_{n_i} son distintas. Como hemos visto, se puede formar $n!$ diferentes "palabras" al permutar las "letras", demostrándose de esa forma que el número de funciones biyectivas entre X y A coincide con $n!$.

1.3. Permutaciones con objetos repetidos

Como vimos, las permutaciones de n objetos de tipo distinto son $n!$. Sin embargo, si varios de los objetos son del mismo tipo (esto es, cuando hay repeticiones de objetos) el número de permutaciones disminuye drásticamente. Este conteo de permutaciones es lo que frecuentemente se denomina "permutaciones con repeticiones" o "permutaciones con objetos repetidos".

La regla general para contar las permutaciones de objetos con repeticiones viene descrita en el siguiente resultado.

Proposición 3 *Si tenemos n objetos de r tipos o clases distintas ($r \leq n$), entonces el número de permutaciones de estos objetos, tomados todos ellos a la vez, es*[1]

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}} := \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, \cdots n_{r-1}!\, n_r!},$$

donde n_i es el número de objetos que hay en la i-ésima clase, con $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$.

Demostración: En efecto, si todos los objetos fuesen distintos, el número total de permutaciones sería $n!$. Sin embargo ahora hay n_i objetos de la clase i-ésima, todos éstos iguales entre sí. Luego, las posiciones de estos n_i objetos pueden permutarse de $n_i!$ formas distintas sin producir ninguna alteración, de donde el número total de permutaciones ahora debe dividirse por $n_i!$. Esto debe hacerse para cada una de las clases, obteniéndose entonces el resultado. ■

A los números $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_{k-1}}$ se les llama *coeficientes multinomiales*, por su relación con el "multinomio" de Newton, que estudiaremos en el capítulo 3.

Por ejemplo, el número de "palabras" distintas (permutaciones de letras) que se puede formar con las letras de la palabra AEREO (sin acento), tomando en cuenta todas las letras, es $\frac{5!}{2!} = 60$, pues la letra E aparece 2 veces en AEREO, mientras que el número de palabras distintas que se puede formar con las letras de la palabra OTORRINOLARINGOLOGO (sin acento), tomando en cuenta todas las letras, es

$$\frac{19!}{6!\, 3!\, (2!)^4} = 1,759,911,753,600,$$

[1]Obsérvese que se emplea la notación $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_{k-1}}$, en vez de la notación $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}$. El último término n_k se obtiene por diferencia: $n_k = n - n_1 - \cdots - n_{k-1}$. Esta notación es una cómoda generalización a la empleada para los "coeficientes binomiales" $\binom{n}{k}$, como se verá más adelante.

pues de las 19 letras, la O se repite 6 veces, la R se repite 3 veces, mientras que otras 4 letras (L, N, I, G) repiten una vez cada una.

1.4. Permutaciones de n objetos, tomados m de ellos a la vez

En este tipo de permutaciones, disponemos de n objetos distinguibles que actúan como prototipo. Cada permutación consiste en seleccionar una muestra ordenada de m de los objetos. Existen dos esquemas distintos de selección: con reemplazo y sin reemplazo.

1.4.1. Selección con reemplazo

En este esquema, vamos formando una permutación al seleccionar uno a uno los m objetos, permitiendo el reemplazo de los mismos, esto es, con posibilidades de repetir los objetos. Para contar el número total de permutaciones de este tipo, observamos que el primer objeto puede seleccionarse de n distintas maneras, el segundo objeto también puede seleccionarse de n distintas maneras, y así sucesivamente hasta el último (m-ésimo) objeto que constituye la permutación. Luego, hemos demostrado el siguiente resultado:

Proposición 4 *El número de permutaciones de n objetos distinguibles, tomando m de ellos a la vez, permitiendo las repeticiones, es n^m.*

Por ejemplo, existen $3^2 = 9$ permutaciones diferentes de las letras a, b, c, tomando dos letras a la vez, a saber: aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc. Obsérvese que debe considerarse el orden de los objetos, como siempre sucede con las permutaciones.

- El ejemplo pone en evidencia que también n^m es el número de "palabras" de m "letras" ("palabras" sin restricciones: pueden repetirse las "letras") que se obtienen a partir de n "letras" distintas.

- El lector puede observar que también n^m es el número de funciones diferentes que se puede definir entre un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ de m elementos y un conjunto $X = \{1, \ldots, n\}$ de n elementos. La justificación de esto radica en que la imagen de a_1 puede ser seleccionada de n diferentes maneras, al igual que la imagen de a_2, de a_3, etc.

- Una última interpretación dentro del ambiente de urnas y bolas: n^m es también el número de maneras de extraer una muestra ordenada de m bolas, con reemplazo, de una urna que contiene n bolas distinguibles.

1.4.2. Selección sin reemplazo

En este esquema, cada una de las permutaciones contiene únicamente m de los n objetos distinguibles originales, sin repeticiones (selección sin reemplazo) de objetos. Cualquier pareja de estas permutaciones que contengan exactamente los mismos objetos —aunque en un orden diferente— son permutaciones diferentes, pues el orden en que aparecen los objetos es importante y debe tomarse en consideración en este tipo de problemas.

Claramente, si $m > n$ no tendremos ninguna permutación de este tipo. Si $m \leq n$, podemos contar el número de permutaciones como sigue: el primer objeto se puede seleccionar de n diferentes maneras; para el segundo objeto dispondremos de $n - 1$ diferentes selecciones, pues el primer objeto ya fue seleccionado; para el tercer objeto tendremos $n - 2$ posibles selecciones, y así sucesivamente. Al final, para seleccionar el objeto m-ésimo de la permutación tendremos $n-m+1$ posibilidades, pues los restantes objetos ya han sido seleccionados. Luego, hemos demostrado el siguiente resultado:

Proposición 5 *Cuando $n \geq m$, el número de permutaciones de n objetos distinguibles, tomando m de ellos a la vez, en un esquema de selección sin reemplazo, es igual a*

$$[n]_m := n\,(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{1.1}$$

Por ejemplo, existen $[3]_2 = 6$ permutaciones diferentes de las $n = 3$ letras a, b, c, tomando $m = 2$ letras a la vez. Ellas son: ab, ac, ba, bc, ca, cb.

- En términos de "palabras" y "letras", $[n]_m$ es el número de "palabras" de m "letras" que se puede formar a partir de n "letras" distintas, si ponemos la restricción que en las palabras no se repitan "letras".
- También $[n]_m$ es el número de funciones *inyectivas* que se puede definir del conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ de m elementos en el conjunto $X = \{1, \ldots, n\}$ de n elementos, como el lector puede fácilmente justificar.
- En el contexto de urnas y bolas, $[n]_m$ es el número de maneras distintas de extraer una muestra sin reemplazo de m bolas, de una urna que contiene originalmente n bolas distinguibles.

1.5. Números de Stirling de primera especie

La definición de los números $[n]_m$ dada en (1.1) puede extenderse de manera natural de la siguiente forma, dando lugar a los *polinomios de Stirling*: para $x \in \mathbb{R}$ definimos el polinomio $[x]_m$, de grado m, mediante la fórmula

$$[x]_m := x\,(x-1)\,(x-2)\cdots(x-m+1).$$

Los primeros 4 polinomios de Stirling son:

$$\begin{aligned}[x]_1 &= x,\\ [x]_2 &= x(x-1) = x^2 - x,\\ [x]_3 &= x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x,\\ [x]_4 &= x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x.\end{aligned}$$

Definición 6 *Los números de Stirling de primera especie, denotados por s_m^k, son los coeficientes de los polinomios de Stirling:*

$$[x]_m = s_m^0 + s_m^1 x + s_m^2 x^2 + \cdots + s_m^m x^m.$$

Aunque no existe una fórmula directa sencilla para el cálculo de los números de Stirling de primera especie, sin embargo éstos pueden calcularse fácilmente utilizando la siguiente relación por recurrencia.

Proposición 7 *Los números de Stirling de primera especie pueden ser calculados mediante la siguiente relación por recurrencia:*

$$\begin{aligned} s_{m+1}^k &= s_m^{k-1} - m\, s_m^k,\\ s_m^0 &= 0,\\ s_m^m &= 1.\end{aligned}$$

Demostración: En efecto, de la definición de $[x]_m$ y $[x]_{m+1}$ obtenemos la relación

$$[x]_{m+1} = [x]_m \cdot (x-m)$$

y por lo tanto, también por definición,

$$\cdots + s_{m+1}^k x^k + \cdots = \left(\cdots + s_m^{k-1} x^{k-1} + s_m^k x^k + \cdots\right)(x-m).$$

Al comparar los coeficientes de x^k en ambos términos de la igualdad anterior se obtiene la relación por recurrencia. Las dos condiciones iniciales son obvias. ■

Utilizando la recurrencia anterior podemos construir rápidamente una tabla para los primeros números de Stirling de primera especie, como se muestra en la Figura 1.1.

1.6. Ejercicios

1. De la ciudad A hasta la B conducen cinco caminos y de la B a la C, tres. ¿Cuántos caminos que pasan por B conducen desde A hasta C? Generalice el problema para cuando hay n caminos de A hacia B y m caminos de B hacia C.

2. Hay cinco tipos de sobres sin estampillas y cuatro tipos de estampillas de un mismo valor. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un sobre con estampilla para enviar una carta? Generalice el problema para cuando hay n tipos de sobres y m tipos de estampillas.

3. Los ingleses suelen dar varios nombres a sus hijos. ¿De cuántas maneras se puede dar un nombre al niño, si el número general de nombres disponibles es igual a 300, y no le dan más de tres nombres a cada niño? Generalice el problema para el caso de un extraño país, en el cual el número general de nombres disponibles es igual a N y no le dan más de n nombres a cada niño.

s_m^k	$k=0$	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$m=1$	0	1						
2	0	-1	1					
3	0	2	-3	1				
4	0	-6	11	-6	1			
5	0	24	-50	35	-10	1		
6	0	-120	274	-225	85	-15	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Figura 1.1: Primeros números de Stirling de primera especie.

4. Varias personas se sientan alrededor de una mesa redonda. Consideramos que dos formas de sentarse coinciden si cada persona tiene los mismos vecinos en ambos casos. ¿De cuántos modos diferentes se puede sentar a la mesa cuatro personas? ¿Y siete personas? ¿En cuántos casos una persona dada (de entre siete) tendrá dos vecinos específicos? Generalice el problema considerando n personas.

5. (a) ¿Cuántos números diferentes de cinco dígitos hay, si los ceros iniciales (como en "00032") no son permitidos? (b) ¿ Cuántos de los anteriores son pares? (c) ¿Cuántos números de cinco dígitos hay (sin ceros iniciales) en los cuales aparece al menos un 3? (d) ¿Cuántos números de cinco dígitos hay (sin ceros iniciales) que formen "palíndromos" (el número es el mismo leído de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, por ejemplo, 26862)?

6. En una reunión deben intervenir 5 personas: A, B, C, D y E. ¿De cuántas maneras se puede distribuir la lista de oradores, con la condición que B no debe intervenir antes que A? ¿De cuántas maneras, si A debe intervenir *inmediatamente* después de B? Generalice el problema para cuando tenemos n personas, dos de ellas llamadas A y B.

7. ¿De cuántas maneras se puede sentar alrededor de una mesa redonda a 5 hombres y 5 mujeres, de modo que no queden a la par dos personas de un mismo sexo? Generalice el problema para cuando tenemos n hombres y n mujeres.

8. En un cierto país no había dos personas con la misma configuración (cantidad y posición) de dientes. ¿Cuál es la población máxima de ese país (el mayor número de dientes es 32)?

9. Los números de automóvil están formados por una, dos o tres letras y cuatro cifras. Hallar la cantidad total de estos números, si se utilizan las 26 letras del alfabeto.

10. ¿Cuántas palabras diferentes se puede obtener permutando las letras de la palabra "MATEMATICA"? ¿Y de la palabra "PARABOLA"? ¿Y de la palabra "INGREDIENTE"? ¿Y de la palabra "PARANGARICUTIRIMICUARO"[2]?

11. Resolver el problema anterior, pero ahora con la restricción que las vocales de las palabras originales deben permanecer en sus posiciones originales. Mismo asunto, ahora con la restricción que las vocales de las palabras originales pueden permutar solamente entre sí y las consonantes pueden permutar solamente entre sí.

12. En una oficina se correos se venden estampillas de 10 tipos distintos. ¿De cuántas formas se puede comprar en ella 12 estampillas? ¿Y 8 estampillas? ¿Y 8 estampillas diferentes?

13. ¿Cuántos números distintos de cuatro cifras y divisibles por 4 pueden formarse a partir de las cifras 1, 2, 3, 4, 5, si cada cifra puede emplearse en la escritura de un número varias veces?

14. ¿Cuántas permutaciones distintas pueden efectuarse con n elementos, en las que dos de ellos, a y b, no estén juntos? ¿Y en las que no lo estén tres, a, b y c (en cualquier orden)? ¿Y en las que ningún par de los elementos a, b y c esté junto?

15. En un torneo de gimnasia participan 10 personas. Tres jueces deben numerarlos, en forma independiente uno de los otros, en un orden que refleje sus éxitos en el torneo, según la opinión de cada juez. Se considera ganador el que haya sido nombrado primero por lo menos por dos jueces. ¿En qué porcentaje de los casos del torneo se habrá determinado un ganador?

[2]Pueblo y volcán de México.

16. ¿Cuántos collares diferentes se puede confeccionar de siete cuentas de distinto tamaño (hay que utilizar las 7)? Generalice el problema para cuando tenemos n cuentas de distinto tamaño.

17. ¿Cuántos collares diferentes se puede confeccionar de cinco cuentas iguales y dos de mayor dimensión? Generalice el problema para cuando tenemos n cuentas de un tipo y m de otro tipo.

18. Si en una sociedad cada persona es representada por sus tres iniciales (nombre, primer apellido y segundo apellido), ¿cuántas personas son necesarias para garantizar que al menos 2 de ellas tienen las mismas iniciales? ¿Y cuántas son necesarias para garantizar que al menos m de ellas tienen las mismas iniciales?

19. En un estante hay $m + n$ libros diferentes, de los cuales m están encuadernados en negro, y n en rojo. ¿Cuántas permutaciones existen de estos libros, en las que las encuadernaciones en negro ocupen los primeros m lugares? ¿Cuántas posiciones hay en las que todos los libros encuadernados en negro se hallen juntos?

20. ¿De cuántos modos se puede poner 5 anillos diferentes en los dedos de una mano, omitiendo el pulgar? Generalice el problema para cuando tenemos n anillos diferentes.

21. ¿Cuántos brazaletes distintos se puede confeccionar de cinco esmeraldas iguales, seis rubíes iguales y siete zafiros iguales (en el brazalete deben figurar todas las 18 piedras)?

22. ¿De cuántos modos se puede seleccionar, de las mismas piedras, tres para un anillo?

23. Para los premios de una olimpíada matemática se prepararon 3 ejemplares de un libro, 2 de otro y 1 de un tercero. ¿De cuántos modos se puede entregar los premios, si en la olimpíada participaron 20 personas y a nadie se le otorga dos libros de golpe? Resuelva el mismo problema, bajo el supuesto que a nadie se le otorgue dos ejemplares de un mismo libro, aunque se le puede entregar dos o tres libros diferentes.

24. ¿Cuántos números distintos de cuatro cifras se puede formar a partir de las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, si cada una de ellas puede repetirse varias veces?

25. Hallar la cantidad de números de seis cifras, para los cuales la suma del número formado por las tres primeras cifras —de estas seis— y del formado por las tres últimas cifras, sea menor que 1000.

26. Generalice la propiedad 1 (a): Encuentre una fórmula para la cardinalidad de la unión de tres conjuntos $A \cup B \cup C$, en términos de las cardinalidades de A, B y C y de las intersecciones de estos conjuntos.

Acerca del autor

Eduardo Piza Volio es un matemático costarricense nacido en Cartago en 1956. Trabaja en la Universidad de Costa Rica desde 1977 hasta la fecha, donde es profesor Catedrático. Ha sido Subdirector de la Escuela de Ciencias de la Computación, Director de la Escuela de Matemática y Director del Centro de Investigación en Matemática Pura. Se ha destacado en aficiones tales como el ajedrez, donde llegó a ser campeón nacional, y el Bridge, deporte en el cual ha sido campeón centroamericano en varias oportunidades. Esta obra es producto de sus inclinaciones hacia la Teoría de la Combinatoria, tópico de las matemáticas que ha sido de su interés durante toda su carrera académica. Otros de sus libros son: *"Introducción al Análisis Real"* (EDUCR), *"Estructuras de la Opinión Pública en Costa Rica"* (EDUCR) y *"Aritmética Recursiva y algunas de sus Aplicaciones"* (Editorial CIMPA).

¿De cuántas maneras...? La combinatoria enumerativa puede definirse en pocas palabras como el arte de contar configuraciones en problemas de naturaleza discreta.

Esta obra es una introducción a esta disciplina de la matemática. Se trata del texto ideal para los estudiantes de las carreras de matemáticas, aunque también la obra está dirigida a todas las personas que tengan interés particular en este fascinante tópico de las matemáticas, pues para empezar su lectura no se requiere de grandes conocimientos preliminares.

La exposición de la teoría se presenta en forma directa y sencilla, poniéndose especial atención en aquellos argumentos de carácter intrínsecamente combinatorio. Contiene una orientación didáctica, al ofrecer gran cantidad de ejemplos y plantear más de 125 ejercicios, la mitad de los cuales son discutidos y resueltos en el capítulo final. También contiene interesantes biografías de las luminarias de la combinatoria.

EDITORIAL
UCR