

GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

Breve historia de una gran revolución intelectual



Ángel Ruiz


EDITORIAL
UCR

Ángel Ruiz

**GEOMETRÍAS
NO EUCLIDIANAS**

Breve historia de una gran
revolución intelectual



Serie Elementos

516.9

R934g Ruiz Zúñiga, Ángel

Geometrías no euclidianas : breve historia de una gran revolución intelectual / Ángel Ruiz. – Primera edición digital. – San José, Costa Rica : Editorial UCR, 2021.

1 recurso en línea (xiv, 186 páginas) : ilustraciones en blanco y negro, fotografías en blanco y negro, retratos en blanco y negro, archivo de texto, PDF, 9.64 MB. – (Serie elementos)

ISBN 978-9968-46-999-9

1.GEOMETRÍA NO EUCLIDIANA. 2. GEOMETRÍA – HISTORIA. 3. MATEMÁTICAS – HISTORIA. I. Título. II. Serie.

CIP/3709

CC.SIBDI.UCR

Las opciones de resaltado del texto, anotaciones o comentarios dependerán de la aplicación y dispositivo en que se realice la lectura de este libro digital.

Edición aprobada por la Comisión Editorial de la Universidad de Costa Rica

Primera edición impresa: 1999.

Primera reimpresión: 2017.

Primera edición digital (PDF): 2021.

Editorial UCR es miembro del Sistema Editorial Universitario Centroamericano (SEDUCA), perteneciente al Consejo Superior Universitario Centroamericano (CSUCA).

Revisión filológica, corrección de pruebas y diagramación: *El autor* • Diseño de portada: *Juan Carlos Fallas Z.* • Control de calidad de la versión impresa: *Sección de Diseño* • Montaje digital: *Mauricio Bolaños B.* • Realización del PDF: *Alonso Prendas V.* • Control de calidad de la versión digital: *Elisa Giacomín V.*

© Editorial de la Universidad de Costa Rica. Todos los derechos reservados. Prohibida la reproducción de la obra o parte de ella, bajo cualquier forma o medio, así como el almacenamiento en bases de datos, sistemas de recuperación y repositorios, sin la autorización escrita del editor.

Edición digital de la Editorial Universidad de Costa Rica. Fecha de creación: agosto, 2021
Universidad de Costa Rica. Ciudad Universitaria Rodrigo Facio. San José, Costa Rica.

CONTENIDO

Capítulo 1

UNA INTRODUCCIÓN, 1

1.1 En la Antigüedad griega, 4

Thales y Pitágoras 4. Periodo Alejandrino 6. Eudoxo 7. Euclides y Apolonio 8. Arquímedes 9. Algunas características de la época 10. Los romanos 11.

1.2 En la Edad Media, 13

El “regreso” de los griegos 16. Los árabes 17.

1.3 Renacimiento y Revolución Científica 20

Matemáticas renacentistas 21. Las nuevas ideas 22. La Revolución Científica 24. Los límites de la geometría clásica 25. Los logros de la revolución Científica 27.

1.4 De la Geometría Analítica al Cálculo, 29

La Geometría Analítica 29. Descartes 30. Fermat 31. El álgebra 32. Las matemáticas del siglo XVII 32. El Cálculo 34.

1.5 En el siglo XVIII, 38

Intuición y aplicación en las matemáticas 38. Un balance 39. El Análisis 41. Los matemáticos franceses del siglo XVIII 43. Una síntesis 44.

1.6 El siglo XIX y las nuevas matemáticas, 45

Dos factores claves 45. Geometría proyectiva 47. Álgebra 48. Geometría y álgebra 50. La Lógica 52.

1.7 Las geometrías no euclidianas, 55

Otra periodización 55. La autonomía de las matemáticas 56.

1.8 Preguntas, 58

Capítulo 2

EN LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA, 61

2.1 Los postulados, 65

Postulados 66. Nociones comunes 68. El quinto postulado 70.

2.2 ¿Autoevidentes?, 71

2.3 Preguntas, 73

Capítulo 3

EL QUINTO POSTULADO, 75

3.1 De Euclides a Saccheri, 77

Ptolomeo 77. Proclus 78. Nasir-Eddîn 79. Wallis 79. La formulación más conocida: el postulado de las paralelas 81. Métodos indirectos 83.

3.2 Saccheri, 84

3.3 Otros precedentes, 88

Klûgel 88. Lambert 88. Schweikart 89.

3.4 Preguntas, 90

Capítulo 4

LAS NUEVAS GEOMETRÍAS, 91

4.1 Gauss y la nueva geometría, 93. La geometría es empírica 96.

4.2 Bolyai y Lobachevsky, 97

Lobachevsky 97. Bolyai 98.

4.3 Prioridad y sentido históricos, 100

Una revolución 101. Dos paralelas y una perpendicular 102.

4.4 Algunas implicaciones, 104

El sentido social de la ciencia y las matemáticas 104. Varios factores sociales 105. Pleitos 106. Inercia y temor 106. Individuo y colectividad 106

4.5 Preguntas, 107

Capítulo 5**DESARROLLOS POSTERIORES, 109****5.1 Riemann, 111**

No hay paralelas 112. La geometría diferencial 115. La superficie como espacio 118. La geometría euclidiana es empírica 119. Por pedazos 120. Espacio físico como ejemplo de variedad 121. Una nueva visión del espacio 122.

5.2 De Riemann a Klein, 124

Curvatura 124. La pseudoesfera 126. La esfera 127. Dentro de la geometría proyectiva 128. La aplicación de las nuevas geometrías 129.

5.3 Preguntas, 130

Capítulo 6**SOBRE LA ESFERA, 131****6.1 Geometría esférica, 133**

Aplicaciones 134.

6.2 Semejanzas y diferencias, 136

El quinto postulado 136. Dos tipos de geometría 139. En la geometría esférica 140. Angulos de un triángulo 141.

6.3 Preguntas, 142

Capítulo 7

OTROS MODELOS GEOMÉTRICOS, 143

7.1 En una silla de montar, 145

7.2 Dentro de un disco, 146

7.3 Otro modelo, 152

7.4 El otro modelo de Poincaré, 157

7.5 Preguntas, 159

Capítulo 8

ALGUNAS LECCIONES, 161

8.1 La cuerda estirada, 163

Newton y Einstein 164. Un paradigma 165.

8.2 Lecciones útiles, 166

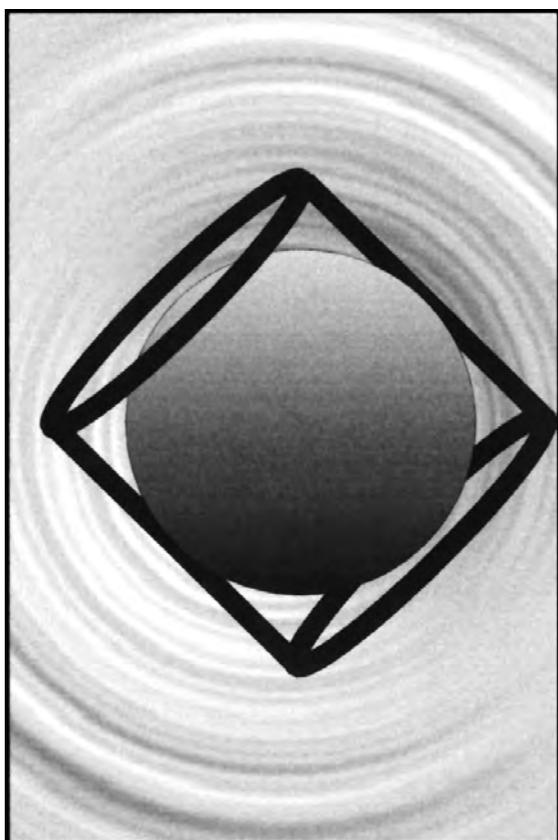
8.3 Preguntas, 168

BIBLIOGRAFÍA GENERAL, 169

INDICE ANALÍTICO, 177.

Capítulo 1

UNA INTRODUCCIÓN



OBJETIVOS

- Realizar una reseña de la historia de las matemáticas, para colocar en la perspectiva más amplia el significado de las geometrías no euclidianas.
- Se ofrece una periodización de la historia de las matemáticas y se describen las principales características de cada etapa.
- Se concluye con reflexiones acerca del papel de las geometrías no euclidianas, y se plantea una periodización distinta en la que juegan un papel importante las geometrías no euclidianas.

Al describir la historia de las matemáticas lo adecuado sería ofrecer una visión integral que incorporara las contribuciones matemáticas de otras culturas importantes además de la occidental; sin embargo, no es éste nuestro propósito en la presente reseña orientada a la comprensión de la creación de las geometrías no euclidianas. Así pues, vamos a comenzar este libro con el establecimiento de una periodización histórica, en general en concordancia con la historia de la sociedad occidental.

- Una primera etapa podemos decir que fue la greco-romana, donde la fase griega fue más sustantiva y significativa para las ciencias y las matemáticas.
- Una segunda etapa: la época medieval, dominada esencialmente por una atmósfera cultural poco propicia para el progreso de las ciencias y, por ende, un escaso desarrollo social y científico.

- Una tercera etapa: el Renacimiento, donde lo fundamental fue un cambio de actitud frente al conocimiento y frente a la vida.
- Una cuarta etapa fue la Revolución Científica en el siglo XVII y, si se quiere, parte del siglo XVIII.
- Podemos decir que una quinta etapa la constituye el trabajo realizado por los matemáticos del siglo XVIII y parte del XIX, cuya característica esencial fue el desarrollo de los temas y métodos matemáticos generados en la revolución matemática y científica del XVII, con especial énfasis en trabajos relacionados con el Cálculo Diferencial e Integral.
- Una sexta etapa se desarrolla en el siglo XIX, donde los elementos significativos fueron el desarrollo del álgebra y en particular de la teoría de grupos, la geometría proyectiva, las geometrías no euclidianas y la rigORIZACIÓN del análisis y las matemáticas en general.

Se puede decir que en algún momento en esta última etapa emerge la matemática moderna que llega hasta nuestros días. Es una decisión algo convencional el establecer los límites finales de una sexta etapa y el inicio de una séptima, con toda precisión, porque las principales tendencias que todavía dominan las matemáticas, de alguna forma, fueron planteadas y desarrolladas durante el mismo siglo XIX.

En este capítulo no ponemos énfasis en los resultados propiamente matemáticos sino, más bien, en los aspectos históricos generales que nos permitan ubicar el trabajo de los matemáticos. Es decir, no hay detalles matemáticos solo descripción de fases y características históricas globales de interés especial para la comprensión del lugar intelectual que ocupan las geometrías no euclidianas.

1.1 EN LA ANTIGÜEDAD GRIEGA

Los primeros desarrollos de la geometría y, en general, de las matemáticas podemos decir que se encuentran alrededor de la cultura helénica, en la Grecia Antigua. Esta cultura fue una base esencial de la civilización occidental.

Thales y Pitágoras

Los primeros nombres de matemáticos que vienen a nuestra mente son los de Thales de Mileto (*circa* 625-545 a.C.) y Pitágoras de Samos (c. 580-500 a.c.), aunque no se sabe con exactitud cuáles son los resultados matemáticos que realmente obtuvieron. Probablemente, y a diferencia de otras obras como las de Platón (c. 429.348 a.C.) o Herodoto, no existen obras específicas que nos den certeza sobre sus trabajos y resultados.

En el caso de Pitágoras, que estableció una escuela científica y religiosa, ni siquiera se puede decir si los resultados que se le atribuyen son suyos o de sus discípulos y correligionarios.

En general, con relación a todas las obras de la Antigüedad Clásica es muy difícil saber con precisión el desarrollo histórico y las características específicas del mismo pues mucho se ha perdido a lo largo de tantos siglos. No obstante, podemos establecer algunas ideas y consensos en torno a este momento de las matemáticas griegas.

Un primer detalle: tanto Thales como Pitágoras tuvieron influencia de las civilizaciones del bronce, grandes culturas que dominaron el mundo conocido durante muchos siglos.

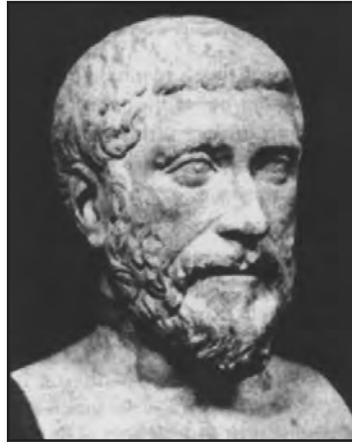
Es Thales quien se supone que inició la geometría deductiva, y a quien se le atribuye el teorema de que un ángulo inscrito en una circunferencia es recto, y, también, que el círculo es dividido en dos partes iguales por un diámetro.



Egipto: una de las civilizaciones del Bronce

Podemos recordar que Thales fue miembro de una famosa escuela de pensadores que trataron de ofrecer una interpretación naturalista sobre la realidad, la Escuela Jónica. Se asegura que esta escuela constituye el primer eslabón en el desenvolvimiento de la cultura griega.

Los pitagóricos establecieron una doctrina importante sobre la naturaleza de los números: ellos consideraban a los números como el fundamento del universo; les daban a los números un significado abstracto. Para Pitágoras, cada cosa es un número específico y, por supuesto, diferentes cosas son representadas por diferentes números.



Pitágoras

Periodo Alejandrino

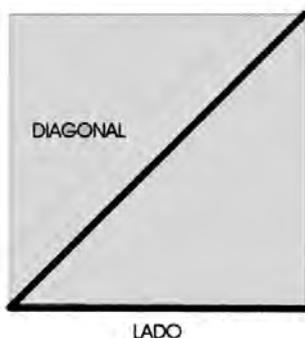
Una nueva época en la civilización griega comenzó a partir de la conquista realizada por los macedonios, un pueblo del norte de Grecia; se dice que los macedonios destruyeron la civilización griega clásica y generaron la apertura de una nueva fase en la historia griega. La conquista macedonia comenzó con Filipo II alrededor del año 352 a.C., de hecho Atenas fue derrotada en el 338 a.C.; sin embargo, quien más huella dejaría en la historia de la humanidad fue Alejandro El Grande, precisamente hijo de Filipo. Alejandro conquistó Grecia, el Cercano Oriente, Egipto y llegó hasta la India; sin embargo, murió muy pronto y su gran imperio se dividió en tres partes. Una de las partes que más importancia tendría para el desarrollo de Occidente y, en particular, de las ciencias, las técnicas y la matemática, fue el llamado Imperio de los Ptolomeos, cuya ciudad más importante llevó el nombre de Alejandría.



Eudoxo

Antes de la nueva fase alejandrina, debemos mencionar el trabajo de Eudoxo (c.408-355 a.C.) que nació en Cnido alrededor del año 408 a.C. Este fue uno de los matemáticos más importantes de toda la cultura griega. Eudoxo se supone fue discípulo de Arquitas (fl.c.400-360 a.C.), en Tarento; y también formó parte de la *Academia* de Platón. Es muy conocido por haber desarrollado el llamado *método de exhaustión*, para aproximar áreas geométricas.

Es interesante mencionar que Eudoxo evitó considerar los números irracionales como números; evitó dar valores numéricos a longitudes de segmentos de recta, tamaño de ángulos y a otras magnitudes así como las razones entre ellas. Esto implicó una drástica separación entre geometría y aritmética, y un cambio en la orientación anterior que daba un énfasis al número como concepto central (visión pitagórica).

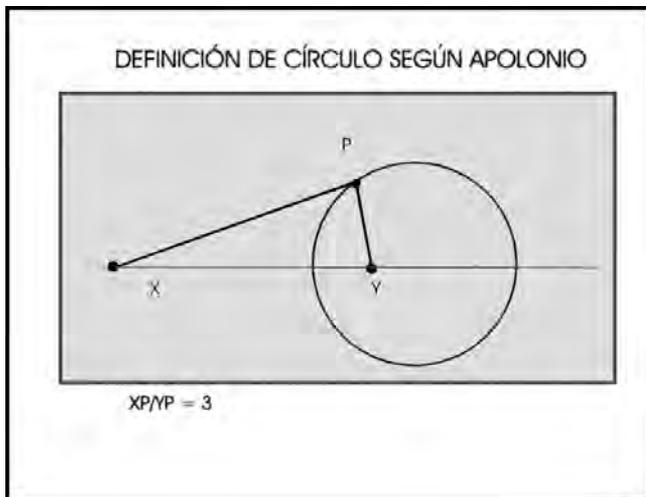


LA RAZÓN ENTRE LA DIAGONAL DEL CUADRADO Y SU LADO ES INCONMENSURABLE: UN NÚMERO IRRACIONAL

Euclides y Apolonio

Ya en pleno período alejandrino, se suele citar los nombres de Euclides (fl.c.300 a. C.) y de Apolonio de Perga (c.262-190 a.C.), aunque el trabajo de Apolonio se dice que posee el espíritu del período anterior.

Euclides es bien conocido por un famoso libro llamado *Elementos*, cuya influencia en la historia ha sido extraordinaria, precisamente porque sintetizó, resumió y sistematizó todo el conocimiento matemático previo y, en particular, a través de un método que echaba mano de la lógica: la *axiomática*. Ya hablaremos de Euclides en los siguientes capítulos. Ahora solo nos interesa colocar su contribución en el marco histórico que describimos.



Conjunto de puntos cuya distancia de un punto fijo es un múltiplo de su distancia de otro punto fijo

Arquímedes

La figura matemática más importante de toda la época podemos decir que fue Arquímedes (c.287-212 a.C.), quien estudió en Alejandría; aquel centro del Imperio de los Ptolomeos que fue una base para la cultura y el aprendizaje en el mundo griego.

Además del cálculo de áreas y volúmenes, aproximó el número π , y obtuvo grandes resultados en hidrostática, astronomía, y mecánica.

Se afirma que tuvo relación con discípulos de Euclides precisamente en Alejandría y algunos de los detalles de su vida son conocidos por medio de una historia escrita por el famoso Plutarco, 45-120 d.C., (*Vidas paralelas: Marcellus*), acerca de un general romano llamado Marcelo.



Arquímedes

Algunas características de la época

Por razones que no vamos a desarrollar aquí, la matemática griega, a pesar de su grandeza, tuvo importantes limitaciones: poca relevancia del álgebra y la aritmética (podemos decir que existió un exceso de geometrización de las matemáticas) y una geometría limitada por reglas muy rígidas desprendidas de la construcción exclusiva con regla y compás.

Se afirma que pesó en todo esto el descubrimiento de los números irracionales, que enfrentaron la visión dominante pitagórica que afirmaba a los números enteros y racionales como fundamento del universo.

Otros asuntos como las paradojas de Zenón (c. 450 a.C.) también jugaron un papel en las características específicas de las matemáticas griegas.



La muerte de Arquímedes por un soldado romano

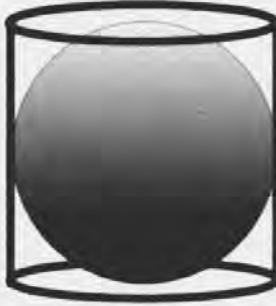
Los romanos

Por diversas razones, el mundo griego fue derrotado por Roma y se creó una nueva fase en el Mediterráneo gobernada por la influencia de los habitantes de la Península Italiana.

Los romanos dejaron su impronta en la historia occidental, pero, en pocos siglos, a eso del V siglo D.C., habían entrado en una plena decadencia.

Durante la época romana si bien se dieron progresos con relación a la organización política y jurídica, a los medios de transporte y distribución, para la cultura no representó una gran victoria: los trabajos en ciencias, matemáticas y en técnicas fueron prácticamente congelados; es decir: un gran retroceso durante siglos para el desarrollo del conocimiento.

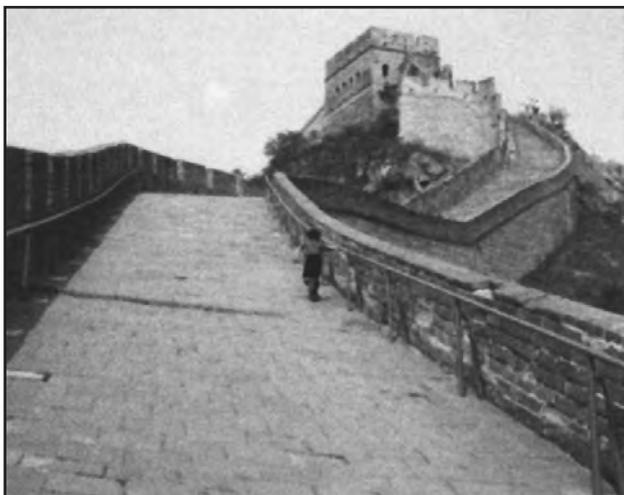
LAS RAZONES DE ARQUÍMEDES



VOLUMEN CILINDRO = $\frac{3}{2}$ VOLUMEN ESFERA
AREA SUPERFICIE CILINDRO = $\frac{3}{2}$ AREA ESFERA

1.2 EN LA EDAD MEDIA

Se suele considerar la Caída de Roma en el año 476 como el inicio de la Edad Media, y el año 1453, con la Caída de Constantinopla en manos turcas, su final. Se trata de una demarcación en esencia política.;, para la historia de las matemáticas o de la ciencia en general otras fechas sería mejores, pero vamos a seguir la división clásica por propósitos didácticos.



China: una cultura que contribuyó a las matemáticas medievales

Es necesario, sin embargo, hacer una advertencia: el grueso de la historia de las matemáticas medievales no fue exclusividad europea; más bien fue el resultado de varias civilizaciones: árabe, india, china, bizantina (Imperio Romano de Oriente) y lo que quedaba del Imperio Romano de Occidente. Cada civilización poseía diferentes lenguas. No vamos en este pequeño libro a analizar más que una de esas culturas, pero

nos interesa resaltar el marco global diverso de esta evolución histórica. Esto es importante porque para muchos asuntos de esta época la mejor comprensión se logra solo si se estudian los contactos e interrelaciones culturales que existieron.

Alrededor del siglo XII y siglos previos la sociedad europea fue esencialmente una colección de pueblos aislados y de poco nivel cultural, con la Iglesia Católica como albacea intelectual. Culturalmente durante todo este período no existió mucha relación con la mayor parte del pensamiento clásico griego, distancia que ya se había establecido desde el mismo Imperio Romano.



El Taj Mahal, del periodo indoislámico, se empezó a construir en 1628

Durante siglos, la enseñanza, el aprendizaje, el conocimiento escaso que se había rescatado de las culturas griega y romana, estuvieron asociados a la Iglesia Católica y, sobre todo, a las necesidades que ella tenía (como, por ejemplo, en los servicios religiosos y la lectura de los libros sagrados). El latín fue escogido como idioma oficial de la Iglesia, por eso duran-

te todo este período en la enseñanza como en el intercambio de conocimiento fue el latín la lengua que se usó.

Debe decirse que en toda esta época no había mucha matemática disponible, aunque en el currículo educativo para las pocas escuelas que hubo se le dio cierto énfasis a las matemáticas. Por ejemplo, el modelo educativo estaba formado por lo que se llama el *cuadrivium* y el *trivium*. El primero estaba constituido por geometría, aritmética, astronomía y música. El *trivium*: por retórica, gramática y dialéctica. Sin embargo, como hemos dicho, el nivel matemático era bajo, apenas una aritmética y una geometría muy elementales.

La razón fundamental del bajo nivel de las matemáticas y la ciencia era la ausencia de factores que estimularan el desarrollo del conocimiento. Para la Iglesia de esos tiempos la verdad y las fuentes y criterios de la misma sólo se encontraban en la revelación divina, y los estudios tenían que orientarse hacia la lectura y análisis de los textos sagrados, donde se suponía se encontraban la verdad y el conocimiento. En ese sentido, métodos empíricos o experimentales estaban prácticamente excluidos para la investigación del mundo circundante.

Como los temas principales de reflexión y análisis eran el pecado, el temor al infierno, la salvación o cómo ascender al cielo, el estudio del mundo físico real no solo se consideraba fuera de los fines de la educación y el conocimiento por parte de la Iglesia, sino que, muchas veces, era considerado algo estéril y, en ocasiones, hasta herético.

Debe advertirse que el término “Edad Media” convoca en realidad diferentes periodos históricos, circunstancias culturales heterogéneas, y resultados históricos que sería mejor separar o distinguir. Hubo auténticas etapas “oscuras” cultural y socialmente, y otras con importantes realizaciones espiri-

tuales; hubo regiones cultas y otras muy atrasadas. Cohabitaron diferentes sistemas económicos, políticos y sociales y puede decirse que toda la época estuvo llena de importantes contradicciones culturales. Al igual que dominó un contexto nada propicio para las ciencias y las matemáticas -como ya señalamos-, de la Edad Media son las primeras universidades “modernas”, desarrollos urbanos novedosos, el progreso de métodos y técnicas agrícolas, y de transporte, etc. Nos resulta más apropiado, entonces, un enfoque “prudente” que parta de esta diversidad y que señale algunas tendencias importantes en su devenir social y cultural.

El “regreso” de los griegos

La forma de vida que dominó durante todos estos siglos, empezó a sentirse afectado alrededor del siglo XII por el descubrimiento por parte de los europeos de las grandes contribuciones en ciencias, matemáticas, literatura y arte, realizados en la Grecia Antigua. Fue a través del comercio y diversos tipos de viajes que tomaron contacto con obras que habían sido conservadas, traducidas e incluso ampliadas por los árabes.

Los trabajos de la Antigüedad griega fueron retomados por los intelectuales europeos y religiosos de la época, creando lo que se suele llamar la *Escolástica*; en síntesis podemos decir que se trató de establecer una unidad entre el pensamiento del gran filósofo de la Antigüedad Aristóteles (c.384-322 a.C.), y las ideas y doctrinas de la Iglesia Católica. A pesar de la vinculación con el pensamiento griego antiguo y los resultados de aquella gran cultura, los dirigentes espirituales de la época no pusieron sus énfasis en los aspectos naturalistas o más relacionados con la indagación empírica, sino en los aspectos, digamos, más metafísicos: en la lógica y en las premisas cosmológicas que menos entraban en contradicción con los dog-

mas establecidos. Por eso, a pesar de que se lograron algunos resultados de interés en ciencias y en matemáticas, éstos no fueron de una gran trascendencia. La situación sólo cambiaría bajo la acción de importantes transformaciones sociales, culturales y políticas que se suelen asociar con los términos de *Renacimiento* y, también, de *Revolución Científica*.

Alrededor de esta época se conocen algunos resultados matemáticos asociados a los nombres de Leonardo de Pisa (c. 1170-1250) y Nicole Oresme (c.1323-1382).

Los árabes

Antes de que hablemos un poco más del Renacimiento y de la Revolución Científica, expresemos algunas consideraciones sobre el influjo árabe en la historia del pensamiento occidental, el cual normalmente no es ampliamente divulgado en los libros de historia y los textos que usamos en nuestras escuelas primarias y secundarias.

Los árabes eran un conjunto de pueblos nómadas que vivían en lo que hoy es la Península Arábiga, que bajo el liderazgo de un gran dirigente religioso llamado Mahoma constituyeron un extraordinario imperio en el Mediterráneo. En el año 632 d.C. el Imperio Árabe limitaba con la India y España, incluía el norte de África y el sur de Italia, mientras que Europa era apenas un grupo de pueblos esencialmente atrasados y aislados. Los árabes construyeron una extraordinaria civilización que cultivó ciencias, artes e incluso promovieron una atmósfera cultural, social y política bastante flexible y tolerante con relación a las religiones y a los pueblos alrededor del Mediterráneo. Los árabes, por lo menos hasta el siglo XV, constituyeron el principal centro de cultura, educación, y ciencias de toda la región. El fundamento básico de su desarrollo cultural estuvo asociado al conocimiento grie-

go de la Antigüedad, a través directamente de fuentes griegas en versión siria o hebrea. Ellos habían tomado contacto con lo que quedó del mundo griego en Bizancio, lo que se suele llamar el Imperio Romano de Oriente, a la vez que de Egipto y escuelas sirias de Edessa, Damasco y Antioquía; aunque también tuvieron contacto con obras conservadas por los cristianos nestorianos en Edessa.



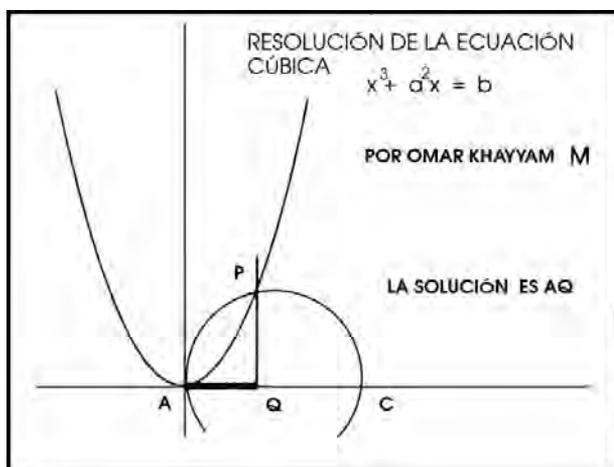
Al-Khoarizmi

Solo para mencionar un ejemplo, debemos decir que en el caso de las matemáticas su papel fue esencial por la relevancia que le dieron al álgebra y a la aritmética. Los griegos antiguos habían geometrizado el álgebra y la aritmética debido a los problemas que encontraron con los números irracionales y con algunas paradojas numéricas. Las debilidades griegas hicieron que se restringieran las posibilidades de desarrollo de la misma geometría; aunque los más afectados fueron el álgebra y la aritmética. Los árabes usaron a diestra y siniestra los números irracionales, al igual que los hindúes. La nota-

ción posicional en base 10 y los números negativos fueron introducidos en Europa por el influjo hindú y árabe.

Podemos citar el nombre de dos insignes matemáticos árabes que han quedado guardados en nuestra cultura: Mohamed ibn Al-Khoarizmi (c.825 d.C.) y Omar Khayyam (c.1038-1123).

La principal influencia árabe podemos decir que empezó a tener su impacto en el mundo europeo sobre todo a partir del mismo siglo XII, cuando representó ese extraordinario puente entre los intelectuales europeos y la Antigüedad griega. En muchas ocasiones, las primeras versiones que recibieron los europeos de los textos clásicos de la Antigüedad (tanto en matemáticas, medicina, química y otras áreas del conocimiento y las técnicas) fueron textos y obras traducidos por los islámicos al arábigo.



1.3 RENACIMIENTO Y REVOLUCIÓN CIENTÍFICA

El Renacimiento significó un *reencuentro* con la cultura clásica antigua; pero esta vez no fue con la lógica formal o la especulación abstracta y no empírica que habían realizado los escolásticos, sino con algo fundamental: la relación con el mundo y la indagación práctica de la naturaleza, el sentido vital, el humanismo. Fue una época en la que todo se cuestionó y, con ello, se abrió un período extraordinario en la producción intelectual y cultural de la sociedad occidental.



Detalle de La Escuela de Atenas de Rafael

Con el Renacimiento, que arrancó en Italia y luego se extendió por otras partes del suelo europeo, comenzó una verdadera revolución de ideas y una nueva actitud ante la sociedad,

la naturaleza y el hombre; revolución que afirmamos constituye uno de los principales fundamentos del mundo moderno.

El reencuentro con la Antigüedad clásica fue importante, pero no fue el único factor que pesó; diversas condiciones económicas, políticas y sociales fueron un auténtico caldo de cultivo para poder potenciar los resultados cognoscitivos de la Antigüedad que “reentran” en el mundo occidental.

Matemáticas renacentistas

El Renacimiento no produjo grandes resultados en matemáticas, lo que no era el caso en otras partes de la vida cultural, por ejemplo en la literatura y el arte. Pero la realidad es que en esta época se estaba logrando crear la infraestructura para dar el salto que se realizó en el siglo XVII y que podemos sintetizar con el nombre de *Revolución Científica*.

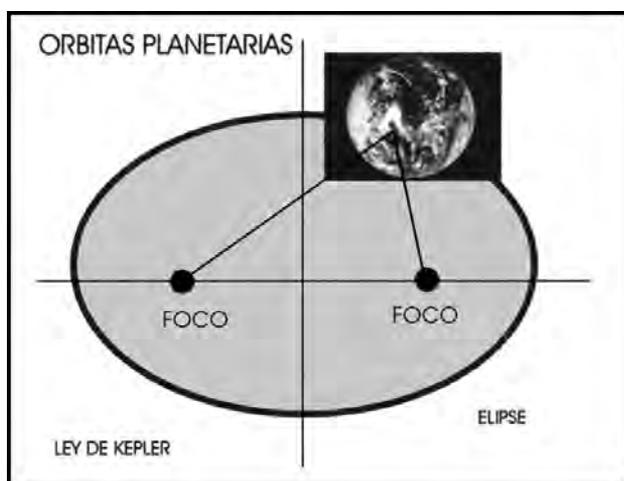
De esta época, vienen a nuestra mente los nombres de algunos matemáticos: Nicolás de Cusa (1401-1464), Regiomontano (1436-1476), Luca Pacioli (1445-1514). También es necesario mencionar que los importantes trabajos en el álgebra (que como veremos serían fundamentales en el nuevo periodo) estuvieron asociados a los italianos Hierónimo Cardano (1501-1576), y Niccolo Tartaglia (c. 1500-1557). Otros matemáticos de la época fueron: Robert Recorde (1510-1558), Georg Rheticus (1514-1576), Pierre de la Ramée (1515-1572), Johannes Werner (1468-1522), Albrecht Dürer (1471-1528), Gerard Mercator (1512-1594) y Francesco Maurolico (1494-1575).

Las nuevas ideas

Los cambios que se dieron en este periodo de la historia fueron extraordinarios. En lo que se refiere a los métodos de la ciencia fueron de fundamental impacto las ideas de Francis Bacon (1561-1626), René Descartes (1596-1650) y de Galileo Galilei (1564-1642).

Con su trabajo se apoyó el desarrollo de los métodos experimentales y empíricos, y el uso de descripciones matemáticas y mecánicas en la comprensión de la naturaleza.

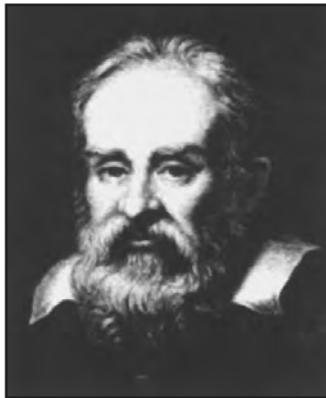
Los nuevos métodos se enfrentaron a las ideas del viejo orden, escolástico y aristotélico, y en un principio se orientaron especialmente contra la cosmología *geocéntrica* dominante (la Tierra el centro del universo).



La teoría *heliocéntrica* (los planetas giran alrededor del Sol) de Copérnico (1473-1543), que poseía antecedentes en la misma Antigüedad, fue defendida radicalmente por Galileo, integrando no solo el marco teórico de Copérnico sino

también los resultados de los astrónomos Tycho Brahe (1546-1601) y Johannes Kepler (1571-1630). El combate que libró este gran científico con las ideas e instituciones dominantes (que le costó condena y castigo por la Inquisición) se convirtió en un impulso extraordinario en la construcción de la nueva ciencia.

El debate con relación a los métodos de la ciencia residía en que para los escolásticos las “verdades” se encontraban en la revelación divina y no en el ejercicio de la experiencia y la razón. Fueron muy pocos los intentos antes del Renacimiento por acudir a la experiencia o a procedimientos experimentales.



Galileo Galilei

Galileo, además de su lucha por abrir espacio al heliocentrismo, contribuyó notablemente en la afirmación de la experimentación empírica y, especialmente, en el uso de las matemáticas (cuantitativas) para la descripción del mundo circundante. De la misma manera, el filósofo inglés Bacon fue un verdadero profeta de la ciencia empírica, y Descartes, filósofo y matemático francés, además de subrayar el papel de

las matemáticas, fue un abanderado por una explicación mecanicista del universo.

La Revolución Científica

Para la revolución intelectual que se dio en las ciencias y las matemáticas del siglo XVII fue necesaria la matemática griega y árabe, pero además el desarrollo de ciertas ciencias empíricas y algunas técnicas nuevas. Tampoco puede decirse que las matemáticas del Renacimiento y el énfasis que se le dio al álgebra y a la aritmética fueran producto exclusivo del influjo griego o de los mismos trabajos árabes; las tradiciones medievales realizadas en ciudades italianas y germanas durante la época medieval, también, jugaron su papel.

Durante el Renacimiento, las matemáticas tuvieron aplicación en varias áreas: desde la contabilidad, la cartografía hasta la agrimensura, el arte y la óptica.

Durante esta época hubo un interés por las obras griegas de cierta complejidad teórica, pero esto no fue muy significativo; podemos decir que obras de Apolonio, Arquímedes o de Pappus (fl.c. 320 d. C.) no habían sido todavía traducidas al latín durante esta época. Tampoco la geometría tuvo mucho desarrollo pero, como hemos dicho antes, lo fundamental no estaba tanto en los resultados como en la actitud que se había abierto hacia la realidad y hacia los métodos del conocimiento.

Ya en el siglo XVII, la Revolución Científica buscó desarrollar métodos matemáticos y científicos apropiados para poder integrar una gran colección de resultados en la física y en la astronomía que se habían estado generando.

Los límites de la geometría clásica

Para que se tenga una idea de lo que significaba esta revolución en las matemáticas conviene que hagamos una breve digresión sobre la geometría clásica. Los límites que ésta tuvo se debieron esencialmente a dos características:

- Por un lado: los griegos antiguos establecieron que las construcciones geométricas y la geometría en general tenían que hacerse con base en la regla y el compás, lo cual restringía extraordinariamente los resultados geométricos. De la misma manera, la geometría era estática, las figuras que se dibujaban eran producto de los procedimientos con regla y compás que se habían establecido y, salvo en algunas excepciones importantes y significativas, el grueso se realizaba de esa manera.
- Por otro lado: las limitaciones en el álgebra, también, hacían que la geometría no tuviera una interrelación que pudiera potenciar sus posibilidades.



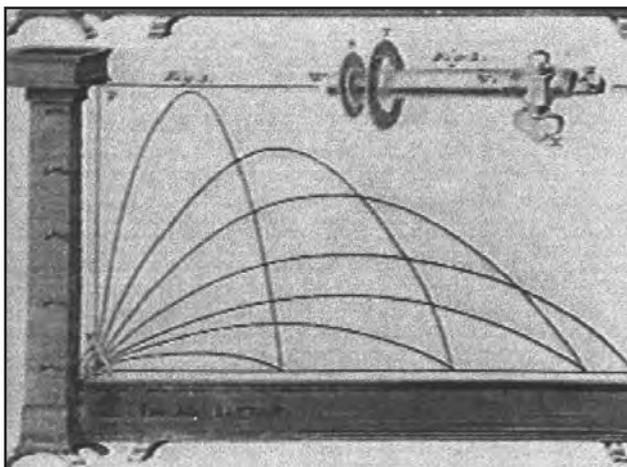
Entonces: en los tiempos de una sociedad emergente (como la europea del Renacimiento del siglo XVII), todo conducía a un replanteo del tipo de geometría que se hizo en la Antigüedad, y no solo de la geometría sino, también, de las matemáticas en general.

Consideremos un ejemplo: uno de los temas claves de la historia de las matemáticas es el de los métodos infinitesimales que constituyen la base del Cálculo Diferencial e Integral. En la Antigüedad griega se trabajó con los conceptos de *infinito* y *continuidad* que son los que están a la base del Cálculo.

Obras de Eudoxo y de Arquímedes en esa dirección son pioneras y constituyen, también, una muestra de la calidad de pensamiento que se llegó a tener en esta fase de la historia de la humanidad, sin embargo, la geometría euclidiana (que ocupó un lugar tan importante en la historia de las matemáticas durante siglos y siglos) poseía limitaciones que le impedían integrar teóricamente los métodos infinitesimales. Excluía, por ser esencialmente estática, el tiempo en los fenómenos físicos que trataba de describir.

Los procesos cinemáticos no podían ser captados por la geometría tradicional. Incluso, curvas como la espiral de Arquímedes, la cuadratriz de Hippias o la conchoide de Nicomedes, no podían ser integradas por esta geometría clásica porque éstas curvas estaban definidas en términos de movimiento.

Los métodos de Pappus tampoco podían integrarse y, por supuesto, no podía integrarse en ese marco conceptual el movimiento de los cuerpos físicos, los cambios en el espacio y el tiempo, la variación de las cantidades: asuntos fundamentales para los matemáticos y científicos del siglo XVII.



Proyectiles, detalle de una pintura de 1648

Motivados por problemas planteados por las ciencias físicas y por la vida social durante los siglos XVI y XVII, los matemáticos y científicos buscaron un nuevo enfoque y nuevos métodos para abordar los problemas; ahí nació precisamente el Cálculo Diferencial e Integral, que tuvo una repercusión extraordinaria en la historia de las matemáticas y en la geometría.

Los logros de la Revolución Científica

El siglo XVII fue una revolución científica en muchos campos, pero esencialmente en las matemáticas y en la astronomía. Podemos tener una idea de lo que esto significó para las matemáticas cuando citamos algunas de las principales obras de la época:

- la Geometría Analítica de Descartes y Pierre de Fermat (1601-1665),
- el mismo Cálculo de Newton y Wilhelm G. Leibniz (1646-1716),
- el Análisis Combinatorio y la Teoría de las Probabilidades que desarrollaron Fermat y Blaise Pascal (1623-1662),
- la Aritmética superior de Fermat, la Dinámica de Galileo y de Isaac Newton (1642-1727) y
- la Gravitación Universal de Newton,
- la Geometría Proyectiva de Gerard Desargues (1593-1662) y Pascal, y hasta
- los principios de la Lógica Simbólica con Leibniz.

SOBRE EL AUTOR

Angel Ruiz Zúñiga es un matemático y filósofo nacido en San José, Costa Rica.

Catedrático de Matemáticas de la Universidad de Costa Rica, ha realizado más de 130 publicaciones académicas dentro y fuera de Costa Rica (entre ellas 25 libros), y ha sido orador invitado en más de 60 congresos internacionales y dado charlas y conferencias en más de 20 países. Ha sido Presidente de la *Asociación Costarricense de Historia y Filosofía de la Ciencia* desde su fundación en 1983.

Algunos de sus libros más recientes:

- *Matemáticas y Filosofía* (1990, Editorial UCR, Costa Rica, Mención honorífica Premio *Jorge Volio* 1995; prólogos Luis Camacho Naranjo y Fernando Leal),
- *La Tercera República: ensayo sobre la Costa Rica del futuro* (1991, Inst. Centroamericano Cultura y Desarrollo; prólogo Fernando Volio),
- *Ocaso de una utopía*. (1993, Edit. UCR, Costa Rica, Primer lugar Premio *Jorge Volio* de Filosofía 1995; prólogo Oscar Arias Sánchez).
- *Universidad y Sociedad en América Latina* (1995, FLACSO; Ganador certamen UNA-FLACSO 1995),
- *Historia de las matemáticas en Costa Rica* (editor científico 1995, E. UCR, UNA; prólogo José Joaquín Trejos Fernández).
- *Disquisitiones Arithmeticae* de Carl Gauss, versión castellana de esta obra famosa (con Hugo Barrantes y Michael Josephy, 1995, Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Bogotá, Colombia).

- *Elementos de Cálculo Diferencial* (complejo didáctico que incluye 4 libros de texto, con H. Barrantes), San José, Costa Rica: Edit. UCR, 1997.
- *The History of the Inter American Committee of Mathematics Education*. (con H. Barrantes). Bogotá, Colombia: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1998, con el patrocinio de Barry University (USA) y el *International Committee on Mathematics Instruction* (ICMI); prólogo por Ubiratan D'Ambrosio.

Esta es una
muestra del libro
en la que se despliega
un número limitado de páginas.

Adquiera el libro completo en la
[Librería UCR Virtual.](#)

LIBRERÍA
UCR

VIRTUAL

Una síntesis de la historia e ideas principales de una gran revolución intelectual: las *Geometrías no euclidianas*. El libro se divide en 3 partes: la primera es una introducción general a la historia de las matemáticas; la segunda, un recuento de los orígenes y el desarrollo de las nuevas geometrías desde Euclides, pasando por Saccheri, Gauss, Lobachevsky, Bolyai, hasta Riemann y Klein. Finalmente, en la tercera se incluyen modelos y representaciones visuales, prácticas y sugestivas de estas geometrías. Este texto es un complemento atractivo, estimulante y útil para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Dirigido a estudiantes, profesores y público en general.

Serie: Elementos

- * Una novedosa y original serie de libros organizados por temas.
- * **Matemáticas con rostro humano: un enfoque intuitivo, riguroso, con aplicaciones e historia.**
- * **Las matemáticas de calidad necesarias para la formación científica y tecnológica que el país necesita en el nuevo contexto. Matemáticas de gran nivel al alcance de todos.**

- *Elementos de Cálculo Diferencial*
Vol. I: Límites y la derivada
Vol II: Derivadas, aplicaciones y temas especiales
- *Elementos de Cálculo Diferencial: Historia y Ejercicios resueltos*
- *Elementos de Cálculo Diferencial: Guía académica Solo para educadores*
- *Geometría y Trigonometría I y II*
- *Álgebra y Análisis I y II*
- *Estadística*